

60248014
V. A. 1511547

TEORICA DEGLI STROMENTI OTTICI

DESTINATI AD ESTENDERE

I CONFINI DELLA VISIONE NATURALE

DI

GIOVANNI SANTINI



PROF. DI ASTRONOMIA DELL' I. R. UNIVERSITA' DI PADOVA,
UNO DEI QUARANTA DELLA SOCIETA' ITALIANA DELLE
SCIENZE RESIDENTE IN MODENA, SOCIO DELL' I. R. AC-
CADEMIA DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI DI PADOVA,
DELLA SOCIETA' ASTRONOMICA DI LONDRA EC.

VOLUME I.



PADOVA

NELLA TIPOGRAFIA DEL SEMINARIO

MDCCCXXVIII.

20

1840. 1. 10.

1840. 1. 10.

1840. 1. 10.

1840. 1. 10.

1840.

1840.

1840.

1840.

1840.

1840.

1840.

1840.

1840.

1840.

1840.

1840.

1840.

1840.

1840.

1840.

1840.

1840.

1840.

1840.

1840.

1840.

1840.

1840.

1840.

1840.

1840.

1840.

1840.

1840.

1840.

PREFAZIONE

Dopo che Galileo rivolse al firmamento un tubo con due fragili vetri, e vi scuoprì nuove meraviglie non pur sospettate al suo tempo, da tutti si comprese il bisogno di coltivare l'ottica teorica e pratica, poichè dai progressi di questa dovevano necessariamente dipendere quelli della fisica e dell'astronomia. Quindi il Galileo stesso ed i suoi discepoli, fra i quali in particolare il celebre Torricelli si occuparono con ardore della teoria delle lenti, ed alle loro speculazioni siamo debitori non solo delle generali proprietà dei cannocchiali e microscopj, ma anche dei primi fra questi stromenti che a quel tempo godessero la riputazione di buoni, e da quegli studj allettati i Campani ed altri giunsero in progresso a costruire quei maravigliosi sussidj alla nostra vista che ci procurarono le più clamorose scoperte nella fisica e nell'astronomia. Era però riservato al genio sublime di Newton indicare le vere sorgenti dalle quali trae origine la imperfezione degli stromenti diottrici, agli sforzi riuniti di Eulero, di Dollond, di Klingestierna e di Clairaut indicare come a questi si può apportare un rimedio, ed all'abilità pratica del Dollond il mostrare col fatto l'utilità del progettato rimedio. Dopo quell'epoca, gli scritti di Eulero, di Boscovich, di Oriani, e di presso che tutti i più celebri matematici della presente e della scorsa età disseminati per gli atti delle più illustri Accademie, o pubblicati in opere separate elevarono la diottrica al grado di una nobile ed estesa scienza, e fecero sentire il bisogno di un trattato speciale, il quale senza essere soverchiamente esteso, fosse tuttavia valevole a porgere una giusta idea dello stato attuale della scienza, e soddisfacesse al doppio sco-

po di porre in grado la studiosa gioventù di leggere utilmente le memorie e le opere più accreditate intorno a questo argomento, e d'indicare le dimensioni ed i precetti, dietro i quali possono i pratici sperare di costruire i loro stromenti diottrici e catottrici con lodevole effetto. Mi sembrò di scorgere presso di noi la mancanza di una sì fatta operetta, e mi sono accinto a quest'ardua intrapresa, animato a ciò dal favorevole accoglimento che ebbero alcune mie lezioni dettate negli scorsi anni in questa celebre Università intorno alla teoria dei cannocehiali e dei microscopj.

Ho stimato opportuno di dividere il presente trattato in due volumetti, dedicando il primo alle proprietà generali degli stromenti diottrici e catottrici, ed alla teorica degli obbiettivi acromatici; il secondo alla descrizione delle diverse specie di cannocehiali, alle varie disposizioni degli oculari, alla teorica dei microscopj, e ad una breve descrizione degli apparati ottici che servono al disegno od al diletto.

Quanto al metodo, credei conveniente di seguire la via dettata già da Eulero e da Klügel nei loro trattati di diottrica analitica, piuttosto che le luminose tracce segnate da la Grange, Malus, Herschel ed altri, e ciò per adattarmi ad un maggior numero di lettori, i quali poco avvezzi alle generali teorie delle differenze finite, si sarebbero trovati in un non leggero imbarazzo nel trasportare alla pratica i precetti della teoria.

Non posso lusingarmi di essere riuscito a seconda del mio desiderio, conoscendo la difficoltà dell'argomento, e sapendo che la teoria deve ricevere il sigillo dalla pratica, in mezzo potentissimo di riscontro, che in questa nostra città, comunque abbondante di abilissimi meccanici, non ho potuto procurarmi, perchè del tutto sfornita di questa classe di artigiani. Imploro quindi sulle mende dell'opera il benigno compatimento del Pubblico, contento per mia parte se il mio tenue lavoro sarà bastante a rivolgere la studiosa gioventù allo studio dell'ottica, donde è permesso sperare un miglioramento nelle pratiche dei nostri artigiani, ed un incremento nell'industria nazionale.

CAPITOLO I.

*Metodi opportuni per determinare il potere
rifrattivo e dispersivo di varie specie di vetri.*

Il perfezionamento di presso che tutte le macchine ottiche dipendendo dal conoscere con accuratezza il potere rifrattivo e dispersivo dei vetri coi quali vogliansi quelle costruire, noi crediamo conveniente al piano della presente opera, ed utile insieme ai nostri lettori far precedere una breve esposizione dei metodi che dovrà porre in opera l'artefice ottico bene instruito per determinare con accuratezza questi importantissimi elementi, senza dei quali indarno aspirare potrebbe a quella precisione che ai giorni nostri tanto si ricerca e si pregia nelle medesime. Il sommo geometra Newton fu il primo a gettare i fondamenti dell'ottica, nella quale fece sublimi ed importanti scoperte. Sapevasi già al suo tempo che un raggio di luce attraversando diversi mezzi diafani di densità differente ritorce il suo cammino dalla linea retta, avvicinandosi alla perpendicolare condotta alla superficie di separazione di due mezzi nel punto d'ingresso, se il mezzo in cui entra è più denso di quello da cui sorte; ed anche era stato congetturato che questa deviazione segue una legge costante, e tale che i seni degli angoli d'incidenza e di rifrazione mantengano fra loro un rapporto costante. Fu però Newton il primo a dimostrare con varj e ben diretti esperimenti la verità di questa legge, che egli ricavò eziandio dai principj ordinarij della meccanica assumendo un'ipotesi felicissima colla quale molto ingegnosamente giunse a spiegare i più sorprendenti fenomeni della visione, che cioè i diversi corpi della natura agiscono sulle molecole luminose a distanze minime.

Nè a questo solo si limitarono le scoperte di Newton; fu il primo a dimostrare che la luce bianca solare risulta dalla mescolanza di varie molecole luminose, dotate di pro-

prietà differenti; valevoli a produrre ciascheduna separatamente sensazioni di diversi colori nella nostra mente col mezzo dell'occhio, e diversamente modificato o rifratto dalle varie sostanze diafane della natura.

Non è nostra intenzione di riferire qui le proprietà della luce rifratta, nè tampoco di esporre le ipotesi immaginate dai fisici per la spiegazione dei fenomeni osservati tanto per la rifrazione, come anche per la riflessione; formando questi importanti argomenti lo scopo particolare della fisica, di cui abbiamo ai di nostri molti eccellenti trattati; noi ci limiteremo soltanto a ciò che è importante a sapersi per la costruzione degli stromenti ottici destinati agli usi della fisica e dell'astronomia.

2. L'esperimento fondamentale al quale unicamente si appoggia la teoria di sì fatti stromenti è il seguente:

„ Sull'imposta di una finestra di una camera priva di
 „ luce si pratici una piccolissima apertura per la quale
 „ ricevasi un sottilissimo raggio di luce solare, e si noti
 „ nell'opposta parete il punto a cui esso si dirige. Si
 „ faccia cadere questo tenuissimo raggio sulla superficie
 „ di un prisma di vetro uniforme, triangolare, lavorato
 „ con molta cura, e privo di vene e filamenti per mo-
 „ do che il piano verticale condotto per la direzione del
 „ raggio luminoso sia perpendicolare agli spigoli del pri-
 „ sma „.

Ciò posto, si osserva che il raggio luminoso sortendo dall'opposta faccia non più si dirige al primitivo luogo, ma ad un punto da quello differente, situato però nello stesso piano verticale. Si osserva inoltre che nella parete alla quale si dirige non segna più un'immagine bianca e rotonda del disco solare, ma un'immagine molto allungata dipinta di tutti i colori dell'iride passando per tenuissime gradazioni, ed infinite dal rosso più intenso fino al violetto il più debole. Dichiareremo nella seguente figura le circostanze di questo esperimento.

Sia F una tenuissima apertura per esempio di una mezza linea del piede di Parigi, praticata sull'imposta di una finestra della camera oscura MGE , per la quale entri un fascio di raggi luminosi provenienti dal sole S , e senza l'intervento di alcun corpo refringente formerebbe un'immagine dell'astro medesimo nel pavimento QP , base di

un cono luminoso QrP , r essendo un punto ad F sommanente vicino determinato dall'incontro dei raggi condotti dai punti QP agli opposti bordi del sole per le estremità dell'apertura. Sia ABC la sezione di un prisma triangolare fatta da un piano perpendicolare alle sue coste condotto per l'asse dell'indicato cono luminoso. Questo fascetto luminoso incontrando in L la superficie refringente del prisma devia dalla linea retta rialzandosi verso la perpendicolare condotta per L nell'interno del prisma alla superficie BC , e giunto all'opposta faccia AC per ripassare nell'aria nuovamente declina, allontanandosi dalla perpendicolare condotta sopra AC , rialzandosi, e dirigendosi nell'opposta parete MN sopra VR , ove non più dipinge una piccola immagine rotonda del disco solare di luce bianca; ma uno spettro allungato, la cui larghezza uguaglia il diametro del circoletto bianco HM , che dipinto avrebbe sulla medesima, se fino ad essa fosse pervenuto senza l'ostacolo del prisma e del paviamento. La distanza del prisma dalla parete MN si fa d'ordinario di 24 a 30 piedi parigini, affinchè più distinta riesca la separazione dei raggi luminosi. La lunghezza dello spettro varia coll'angolo ACB del prisma, e colla materia di cui è composto; esso è terminato sensibilmente in due archi di circolo, l'inferiore dei quali è colorito in rosso, ed il superiore in violetto. I colori vanno passando per gradazioni insensibili dal rosso al violetto nell'ordine seguente:

1. Rosso, 2. Aranciato, 3. Giallo, 4. Verde,
5. Azzurro o Turchino, 6. Indaco, 7. Violetto.

I confini laterali di tale spettro sono sensibilmente due linee rette; le due estremità inferiore e superiore sono mal terminate, e difficili a bene riconoscersi; tuttavia l'estremo rosso è molto più preciso dell'estremo violetto, dalla quale parte lo spettro per minime gradazioni debolissime ed impercettibili si va perdendo nell'oscurità. Più difficilmente ancora si distinguono i confini separanti un colore dall'altro. Ciò in parte deve ripetersi dalla causa seguente. Ciascun punto dell'apertura F deve riguardarsi come il vertice di un cono luminoso avente per base il disco solare, e per cui passano infiniti raggi luminosi procedenti da ciaschedun punto del medesimo, i quali in conseguenza seco portano una diversa immagine. Ogni uno di questi

coni separatamente si risolve nei suoi distinti colori, e va a dipingere nella parete *MN* uno spettro separato rappresentante l'immagine allungata del sole. I colori omologhi di cadauna di queste immagini non procedendo da uno stesso punto, non si sovrappongono esattamente, ma mescolandosi insieme producono dei colori di gradazioni miste le une poco dalle altre differenti, e perciò difficilissime a distinguersi. Ciò non pertanto rendendo tenuissima l'apertura, o raccogliendo nel foco di una lente i raggi introdotti nella camera oscura prima di farli attraversare, l'angolo refringente del prisma si giunge ad avvicinare molto all'omogeneità le diverse porzioni dello spettro solare, ed a rappresentare in una strettissima fascia oblunga i colori primitivi.

Sebbene i rapporti delle diverse estensioni da essi occupati nello spettro non sieno per tutti i vetri gli stessi, tuttavia si può prossimamente ritenere la seguente scala, che Newton il primo dedusse dalle proprie osservazioni. Supposta la lunghezza totale dello spettro divisa in 360 parti uguali, egli trovò che

il color rosso ne occupa . . .	45
l'aranciato	27
il giallo	48
il verde	60
l'azzurro	60
l'indaco	40
il violetto	80.

Il sommo Newton a questo proposito cadde in errore, poichè credè che qualunque fosse la sostanza refringente del prisma, i rapporti degli spazj occupati dai diversi colori nello spettro colorato rimanessero costanti; mentre con inconcussi esperimenti Dollond, Boschovich ed altri hanno dimostrato che variano nelle diverse paste di vetri.

La *figura 2* rappresenta la successione dei colori nello spettro, e porta in numeri la loro estensione secondo la scala Newtoniana.

3. Fatto questo esperimento fondamentale, Newton si assicurò in diversi modi che i colori dello spettro solare non dipendono da illusioni ottiche, nè da imperfezioni del vetro, ma da proprietà incrente alla luce. Primieramente ricevendo lo spettro sopra una tavola munita di un foro,

e conducendolo successivamente nei diversi colori per modo che i raggi di luce ad essi appartenenti liberamente continuassero il loro viaggio separati dagli altri che venivano dalla tavola impediti, osservò che se si facevano attraversare un altro prisma di vetro simile al primo, od anche di diversa pasta, di angolo refringente maggiore o minore, non venivano più decomposti; ma rimanevano della stessa natura, fatta astrazione da piccole irregolarità provenienti dalla imperfetta omogeneità dei raggi cadenti in uno stesso luogo dello spettro. In secondo luogo, se lo spettro colorato prodotto dal prisma venga ricevuto sopra una lente convessa, che ha la proprietà di riunire ad un punto i raggi divergenti, si osserva che i colori differenti ravvicinandosi e mescolandosi insieme nel punto di riunione vi riproducono un'immagine sensibilmente bianca e rotonda; o se rimane alcun poco nei bordi colorata, ciò dipende unicamente dal non raccogliersi allo stesso identico punto i diversi raggi componenti lo spettro, come mostriamo in appresso.

Dopo che i raggi sonosi riuniti ed intersecati nel foco della lente, si separano nuovamente, e se ricevansi di nuovo ad una notabile distanza in una superficie o nella parete della camera, vi producono un nuovo spettro simile al primo, ma inversamente posto. Questi fenomeni, che costantemente si presentano, condussero Newton alle seguenti importantissime conseguenze.

1.° La luce bianca solare non è composta di raggi omogenei dotati tutti di un'uguale rifrangibilità.

2.° La luce bianca risulta dalla mescolanza dei raggi di luce omogenea procedenti dal sole, ad ognuno dei quali compete un determinato grado di rifrangibilità nell'attraversare i varj mezzi della natura. Questi colori omogenei, o vogliansi dire primitivi si riducono ai sette sopra nominati dello spettro solare, e si presentano al senso nostro con maggiore o minore intensità ogni volta che da una sostanza refringente un raggio di luce bianca sia separato e risolto nei raggi primitivi obbligati dopo la rifrazione a prendere ciascuno una direzione sua propria e particolare.

3.° La riunione dei colori primitivi in un angustissimo spazio produce in noi la sensazione della luce bianca, di tal colore faccudocelo apparire, siccome accennammo ac-

cadere nel foco della lente che raccoglie e riunisce i raggi dello spettro solare. Ma in tale intersecamento non risulta in essi alcuna modificazione particolare, nè alcuna azione esercitano gli uni sopra gli altri, poichè vedemmo che dopo essersi riuniti prosegue ciascuno la sua particolare direzione, alla quale venne obbligato dalle proprietà della lente, e va a dipingere un nuovo spettro nell'opposta parete, in cui altro di diverso non si osserva che la necessaria inversione dei colori cagionata dall'intersezione dei raggi.

4. Dopo di aver richiamato le cose precedenti dalla fisica sperimentale, le quali con tutta chiarezza ed estensione possono riscontrarsi eziandio nella sublime Ottica dello stesso Newton; passeremo ad esporre le formule dalle quali dipende il viaggio di un raggio luminoso attraverso ad un prisma, ed avanti tutto per maggiore chiarezza riferiremo eziandio le seguenti notizie e definizioni.

Defin. I. Se un raggio di luce passa da un mezzo di una data densità in altro mezzo di diversa densità, la perpendicolare condotta per il punto di passaggio alla superficie separante i due mezzi si chiamerà *cateto d'incidenza*; l'angolo formato dalla primitiva direzione del raggio luminoso col cateto d'incidenza dirassi *angolo d'incidenza*; l'angolo poi formato dalla nuova direzione del raggio luminoso col cateto d'incidenza prolungato si chiamerà *angolo rifratto*; la differenza fra l'angolo d'incidenza e l'angolo rifratto si chiamerà *angolo di rifrazione*, o semplicemente *rifrazione*.

Così nella *fig. 3* se AB rappresenta la superficie di separazione di due mezzi; OM un raggio di luce che dal mezzo BCA passa nell'altro BQA ; la retta CM perpendicolare ad AB sarà il cateto d'incidenza; l'angolo OMC chiamerassi angolo d'incidenza; l'angolo QMF sarà l'angolo rifratto, ed infine l'angolo FMG differenza fra $OMC = QMG$, e l'angolo rifratto QMF sarà l'angolo di rifrazione, o la rifrazione di cui devia il raggio luminoso OM dalla primiera sua direzione attraverso al secondo mezzo.

Defin. II. L'angolo ACB (*fig. 1*) per il quale un raggio luminoso OM è obbligato a passare chiamasi *angolo refringente*.

Defin. III. Quella forza che fa deviare un raggio luminoso nel passaggio da un mezzo in un altro di diversa densità dalla sua primitiva direzione dirassi *forza rifrattiva*.

La forza rifrattiva produce effetti diversi quando agisce in raggi di diversi colori, osservandosi che dalla primitiva direzione in uno stesso mezzo sono allontanati più i raggi violetti che i verdi, e questi più dei rossi.

Defin. IV. Quella quantità più o meno grande di cui i raggi di un colore vengono allontanati in uno stesso mezzo da quelli dell'altro appellasi *dispersione*, e *forza dispersiva* quella che opera la misura di tale separazione.

5. Si dimostra in tutti i trattati di fisica con l'esperienza, che passando obliquamente un raggio luminoso da un mezzo più raro in un mezzo più denso, si avvicina alla direzione del cateto d'incidenza, in modo che abbiasi sempre la proporzione *seno dell'angolo d'incidenza: seno dell'angolo rifratto* in un rapporto costante, che noi porremo di $m : 1$. Quindi posto i l'angolo d'incidenza, r l'angolo rifratto, avremo $m = \frac{\text{sen } i}{\text{sen } r}$.

Il numero m chiamasi anche indice di rifrazione; questo è diverso per i diversi colori, e dalla differenza dei valori di m per i varj colori dipende la *forza dispersiva* del mezzo refringente. Premesse queste cose, venghiamo alla soluzione del seguente

6. **PROBLEMA.** *Se un raggio luminoso e semplice LM attraversa l'angolo refringente ABC di un dato prisma triangolare determinare la via che sarà per descrivere (fig. 4).*

Pongasi l'indice di rifrazione nel passaggio dall'aria nella sostanza del prisma $= m$; sia M il punto d'ingresso; MQ la linea che descrive nell'interno del prisma; Q il punto d'egresso; QS la linea descritta dal raggio luminoso dopo la sortita dal prisma. Per i punti M, Q si conducano le rette OP, GP perpendicolari alle faccie del prisma BC, AB , le quali s'incontrino nel punto P .

Pongasi l'angolo d'incidenza $LMO = \sigma$

l'angolo rifratto $PMQ = \sigma'$

il secondo angolo d'incidenza $PQM = \varphi'$

ed il secondo angolo rifratto $SQG = \varphi$.

L'angolo $LN F$ formato dalla nuova direzione SQ del raggio luminoso colla sua primitiva direzione LM chiamisi μ ; ed è evidente che rappresenterà la intera rifrazione subita dal raggio attraversando il prisma; l'angolo refringente ABC chiamisi ψ .

Prunieramente, a motivo degli angoli PQB , PMB retti, sarà l'angolo in $P = 180^\circ - \psi$; quindi l'angolo $PQM = 180^\circ - (180^\circ - \psi) - PMQ$, ovvero $\rho' = \psi - \sigma'$.

In secondo luogo, per la legge stabilita al § 5, avremo per il passaggio dall'aria nel vetro $\text{sen } \sigma : \text{sen } \sigma' :: m : 1$, e per il passaggio dal vetro nell'aria $\text{sen } \rho' : \text{sen } \rho :: 1 : m$, dalle quali proporzioni si ricava

$$\text{sen } \sigma' = \frac{\text{sen } \sigma}{m}; \quad \text{sen } \rho = m \text{ sen } \rho'.$$

La seconda di queste equazioni diviene, sostituendo per ρ' il suo valore, $\text{sen } \rho = m \text{ sen } (\psi - \sigma')$, ovvero $\text{sen } \rho = m \cos \sigma' \text{ sen } \psi - m \text{ sen } \sigma' \cos \psi$.

Eliminando σ' col mezzo della prima equazione si troverà dietro facile riduzione

$$(\text{sen } \rho + \text{sen } \sigma \cos \psi)^2 = m^2 \text{ sen}' \psi - \text{sen}' \psi \text{ sen}' \sigma \dots (A).$$

Da questa equazione, se vengano osservati gli angoli ψ , σ , ed inoltre conoscesi l'indice di rifrazione m , agevolmente si ricaverà l'angolo ρ , per cui si determina la posizione del raggio emergente SQ rapporto alla perpendicolare PG ; viceversa, se siano stati con accuratezza osservati gli angoli σ , ρ , ψ si avrà l'indice di rifrazione m per l'equazione

$$m = \frac{\sqrt{\text{sen}' \psi \text{ sen}' \sigma + (\text{sen } \rho + \text{sen } \sigma \cos \psi)^2}}{\text{sen } \psi} \dots (B)$$

Per ultimo, la rifrazione totale $LN F$, ossia μ sarà $= \sigma + \rho - \psi$. In fatti

$$LN F = QMN + MQN = \sigma - \sigma' + \rho - \rho' = \sigma + \rho - \psi$$

a cagione di $\sigma' + \rho' = \psi$.

$$7. \text{ Coroll. I. Sia } \sigma = 0^\circ, \text{ sarà } m = \frac{\text{sen } \rho}{\text{sen } \psi} \dots (C)$$

equazione che porge il metodo semplicissimo praticato da Boscovich, come fra poco diremo, per determinare l'indice di rifrazione. In questo caso il raggio incidente LM coincide con la perpendicolare OP ; passa senza rifran-

gersi dentro il prisma, e subisce una sola rifrazione sortendone per $Q S$, come apparisce dalla *fig. 5*.

8. *Coroll. II.* Sia $\sigma = \varphi$, ossia l'angolo che il raggio incidente LM fa colla prima superficie del prisma uguale all'angolo che il raggio emergente SQ fa colla seconda superficie. In questo caso avremo $\mu = 2\sigma - \psi$, e però $\sigma = \frac{1}{2}(\mu + \psi)$. L'equazione (B) darà

$$m = \frac{\sqrt{2 \operatorname{sen}' \sigma + 2 \cos \psi \operatorname{sen}' \sigma}}{\operatorname{sen} \psi} = \frac{2 \cos \frac{1}{2} \psi \operatorname{sen} \sigma}{\operatorname{sen} \psi} = \frac{\operatorname{sen} \sigma}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} \psi}$$

ovvero sostituendo per σ il suo valore

$$m = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (\mu + \psi)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} \psi} \dots (D)$$

formula molto comoda per calcolare in questo caso il numero m , e della quale ha fatto uso il signor Fraunhofer, come vedremo in progresso nel riferire le sue nuove osservazioni e le sue scoperte intorno alla luce.

Coroll. III. Sia l'angolo refringente del prisma di pochi gradi, e tale che si possa assumere $\operatorname{sen} \psi = \psi$; $\cos \psi = 1$. In tal caso chiaramente apparisce che saranno le quantità μ , σ , φ dello stesso ordine. Ora l'equazione (B) sviluppando il quadrato di $\operatorname{sen} \varphi + \operatorname{sen} \sigma \cos \psi$

$$\text{diviene } m = \frac{\sqrt{\operatorname{sen}' \sigma + 2 \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \sigma \cos \psi + \operatorname{sen}' \varphi}}{\operatorname{sen} \psi},$$

la quale ponendo $\cos \psi = 1$ diviene $m = \frac{\operatorname{sen} \sigma + \operatorname{sen} \varphi}{\operatorname{sen} \psi}$,
che a motivo di $\operatorname{sen} \sigma = \sigma$, $\operatorname{sen} \varphi = \varphi$, $\operatorname{sen} \psi = \psi$ dà
prossimamente $m = \frac{\sigma + \varphi}{\psi}$.

Rammentando ora che $\mu = \sigma + \varphi - \psi$, avremo
 $\sigma + \varphi = \mu + \psi$; quindi $m = 1 + \frac{\mu}{\psi} \dots (E)$

cioè nei prismi di angolo refringente molto piccolo l'indice di rifrazione è indipendente dall'angolo d'incidenza sulla prima superficie.

9. *Scolio.* La rifrazione μ essendo generalmente espressa per $\sigma + \varphi - \psi$ varia in uno stesso prisma al variare degli angoli σ e φ . Ciò dimostrasi eziandio con l'osservazione nell'apparato che abbiamo descritto al § 2 *fig. 1*

nel modo seguente. Introdotta per l'apertura F un raggio solare, si riceva nell'angolo refringente ABC di un prisma, il cui asse sia orizzontale. Se si faccia lentissimamente girare intorno a questo asse orizzontale il prisma, in modo che il raggio incidente faccia colla superficie BC degli angoli sempre diversi, lo spettro solare a bel principio discenderà nell'opposta parete MN ; giunto poi ad una certa posizione continuando a volgere il prisma, rimarrà per alcuni istanti stazionario, indi comincerà a rialzarsi, e continuerà finchè sparisce del tutto. Pertanto la rifrazione μ , variando gli angoli σ , ϱ diminuisce fino ad acquistare un valore minimo, oltre il quale di nuovo torna ad aumentare. Quindi il seguente

10. PROBLEMA. *Determinare il rapporto degli angoli σ , ϱ nel caso che la rifrazione μ sia giunta al suo minimo valore.*

Abbiamo veduto nel problema precedente essere $\mu = \sigma + \varrho - \psi$, essendo ψ costante ed uguale all'angolo refringente del prisma. Ora nel caso della minima rifrazione deve essere $d\mu = 0$; quindi sarà $d\varrho = -d\sigma$. Differenziando in questa ipotesi l'equazione (A), troveremo dietro facili riduzioni l'equazione

$$\begin{aligned} \text{sen } \varrho \cos \varrho - \cos \psi \text{ sen } (\varrho - \sigma) &= \text{sen } \sigma \cos \sigma, \\ \text{ovvero } \text{sen } 2\varrho - 2 \cos \psi \text{ sen } (\varrho - \sigma) &= \text{sen } 2\sigma, \end{aligned}$$

la quale è soddisfatta ponendo $\varrho = \sigma$.

Ma per vedere anche con maggiore chiarezza non esservi che questa soluzione del problema, riflettiamo che $\psi = \sigma' + \varrho'$; quindi avremo contemporaneamente $d\varrho = -d\sigma$, ed anche $d\sigma' + d\varrho' = 0$. Ora troviamo di sopra $\text{sen } \sigma' = \frac{\text{sen } \sigma}{m}$; $\text{sen } \varrho' = \frac{\text{sen } \varrho}{m}$ (§ 6).

Perciò avremo

$$d\sigma' + d\varrho' = \frac{\cos \sigma}{m \cos \sigma'} d\sigma + \frac{\cos \varrho}{m \cos \varrho'} d\varrho = 0,$$

la quale a motivo della condizione $d\varrho = -d\sigma$ diviene

$$\cos \sigma \cos \varrho' = \cos \varrho \cos \sigma'.$$

Eliminando da questa ultima equazione ϱ' , σ' , si avrà

$$\cos \sigma \sqrt{1 - \frac{\text{sen}^2 \varrho}{m^2}} = \cos \varrho \sqrt{1 - \frac{\text{sen}^2 \sigma}{m^2}}.$$

Facendo i quadrati, e sostituendo per $\cos' \varphi$, $\cos' \sigma$ i loro valori $1 - \sin' \varphi$, $1 - \sin' \sigma$ si ottiene la seguente equazione $\sin' \sigma - \sin' \varphi = \frac{\sin' \sigma - \sin' \varphi}{m'}$,

la quale quando m è diverso dall'unità non può essere soddisfatta che nel caso di $\sigma = \varphi$.

Risulta da ciò che ha luogo la minima rifrazione nel prisma quando l'angolo formato dal raggio di luce colla prima superficie nell'ingresso dentro il medesimo è uguale all'angolo che forma colla seconda superficie mentre rientra nell'aria.

In questo caso, che è quello già contemplato al § 8, avremo l'angolo d'incidenza $\sigma = \frac{1}{2}(\mu + \psi)$.

Metodi da praticarsi per determinare l'indice di rifrazione nelle diverse qualità dei vetri.

11. Se di una data qualità di vetro determinare si voglia con qualche precisione l'indice di rifrazione m sarà necessario costruirne prima di tutto un prisma triangolare, le cui facce sieno quanto si può piane e levigate, e gli angoli si avvicinino possibilmente ad essere di 60° , di modo che la sua sezione non molto si allontani dal triangolo equilatero. Alle sue basi laterali (fig. 6) ACB , $A'CB'$ vi applicheranno due perni uguali F , G e cilindrici, i quali rappresentino un asse parallelo alla sua costa CC' , intorno a cui si possa aggirare. Tali perni potranno essere di metallo, od anche si procureranno nello stesso vetro, arrottando e diminuendo nelle due opposte facce la lunghezza del prisma. Si costruisca quindi un sostegno $FGMN$ o in legno od in metallo, tale da rendere l'asse intorno a cui ruota, ed il lato CC' orizzontale. Di un tale prisma misurisi con ogni accuratezza l'angolo ACB , che porremo essere l'angolo refringente, con taluno dei metodi che vengono esposti nella nota seguente (1).

(1) Gli angoli refringenti dei prismi che entrano come elementi primarij nelle equazioni stabilite per determinare gl'indici di rifrazione e di dispersione si possono ottenere colla risoluzione di un triangolo rettilineo generato dalle sezioni di un piano perpendicolare agli spigoli del prisma medesimo colle sue facce, riguardando in questo

Predisposte queste cose, ricevasi (*fig. 1*) in una camera oscura della lunghezza di 24 a 30 piedi parigini in un giorno sereno verso l'ora di mezzodì un fascio di raggi

triangolo i tre lati come conosciuti, e misurati con un compasso in una scala qualunque. Un tale metodo però sarebbe poco sicuro; imperciocchè i lati di questo triangolo sono per l'ordinario molto piccoli, ed un leggero errore nella loro misura ha una grande influenza negli angoli cercati; inoltre è spesso difficile apprezzare giustamente la lunghezza dei lati, essendo talvolta gli spigoli dei prismi alcun poco smussati; perciò è d'uopo ricorrere ad altri mezzi. Lo stromento di cui mi servo (opera dell'abilissimo nostro meccanico Giuseppe Stefani) è un circolo intero di 8 pollici di diametro, sostenuto da un tripode, che con opportune viti può rendersi orizzontale; è diviso di 20 in 20 minuti con un nonio, da cui si ottengono 20"; le divisioni sono esatissime, ed ottenute mediante una macchina divisoria costruita sul principio di quella del celebre Reichenbach, mancato nel decorso anno alle scienze fisiche, alle quali coi suoi esatissimi stromenti fece fare grandi e rapidi progressi. Il nonio è scolpito in un circolo concentrico a quello che porta le divisioni, il quale si può liberamente aggirare intorno al centro, e con viti di pressione stabilire in qualunque punto. Nel centro del circolo che porta il nonio si fissa il prisma di cui vuoi misurare l'angolo refringente cogli spigoli perpendicolari al suo piano, ed un piccolo cannocchiale portato da una colonnetta con una vite di pressione si ferma sul circolo esterno, dirigendo il suo asse al centro dello stromento; indi si gira il circolo interno, e con esso il prisma finchè l'immagine di un oggetto lontano, per es. di un campanile, riflessa da una faccia del prisma corrisponde all'asse del cannocchiale, e leggesi la divisione a questo stato corrispondente. Si conduce in appresso nel cannocchiale medesimo (che rimane inalterato) l'immagine dello stesso oggetto riflessa dall'altra faccia del prisma, e leggesi la divisione corrispondente a questo secondo stato. La metà dell'angolo percorso per una conosciuta proprietà degli specchi piani è l'angolo del prisma.

Quantunque il metodo ora esposto dia con lodevole precisione la misura degli angoli, pure non è scevro di difficoltà e d'incertezze; primieramente le immagini riflesse dagli oggetti terrestri sono deboli ed incerte, massime se la parte del prisma che le riflette cade verso gli spigoli; in secondo luogo i difetti di costruzione e gli errori nei piani delle facce possono avervi una troppo sensibile influenza; perciò preferisco l'uso del compasso rappresentato nella *fig. 18*, i cui lati CM , CN sono divisi in parti uguali aventi la loro origine nel centro di moto C ; CA , CB rappresentano due lamine di ottone piane e levigate, mediante le viti a , a , fissate sui lati del compasso, perpendicolari al suo piano, alte circa un pollice, in modo disposte che quando è chiuso combacino perfettamente, ed aprendosi il loro spigolo verticale C giri intorno allo stesso centro del compasso. Fra queste lamine s'introduce il prisma con l'angolo da misurarsi, aprendo il compasso per modo che esse combacino esattamente in tutta la loro estensione colle due superficie del prisma. La distanza di due divi-

solari per una tenuissima apertura o rettangolare o circolare, ma della larghezza di circa mezza linea del piede di Parigi, e sarà anche meglio ricevere la luce solare dentro la camera per un cilindro di circa un pollice di diametro, nella cui base inferiore siavi praticata la nominata tenue apertura ad oggetto di allontanare ogni luce laterale. Con una matita si noti nel pavimento, che suppongo ben levigato ed orizzontale, la posizione QP dell'immagine solare; indi prestamente in gran vicinanza del foro F oppongasi il prisma al raggio solare coll'angolo refringente rivolto al suolo, ed aggirisi lentamente, finchè lo spettro solare VR nell'opposta parete MN giunto alla minima altezza appaia stazionario, e fermatolo in questa posizione, si segnino colla matita le estremità del medesimo, la sua larghezza, ed eziandio quanto più precisamente si può i confini dei diversi colori dello spettro. Fatto questo, si procederà al calcolo del valore di m per i diversi colori nel modo seguente.

Si misurerà con ogni accuratezza l'elevazione verticale del centro del foro F sopra il piano orizzontale del pavimento $G X$, che porremo $= a$; la distanza orizzontale del medesimo punto F dal centro dell'immagine segnata in $Q P$, che porremo $= b$; la distanza del centro di $Q P$ dal piede X dell'opposta parete, che porremo $= c$. Si avrà tosto la depressione del centro dell'immagine HM sotto il punto X , che nomineremo Z dalla proporzione $a : b :: c : Z$, donde risulterà $Z = \frac{bc}{a}$.

Si misuri poscia l'elevazione $R X$ del principio dello spettro, a cui si aggiunga la semilarghezza dello spettro medesimo per avere prossimamente la posizione dei raggi rossi procedenti dal centro del sole, e la somma pongasi $= y$; lo stesso facciasi per i limiti degli altri colori, e per

sioni dello stesso nome portata in una scala divisa in mille parti sarà la corda dell'angolo cercato.

Lo stromento sopra descritto porge eziandio questo mezzo di misurare gli angoli; CM è un raggio del circolo interno; CN è un braccio che porta un nonio, il quale pure dà $20''$; CA , CB sono i due pezzi ai quali si appoggia il prisma. Quando lo stromento è chiuso, il nonio fisso nel braccio CN corrisponde a $0''$ o' $0''$ aperto; corrisponde alla divisione che rappresenta l'angolo del prisma.

il confine del colore violetto, da cui leverassi invece la semilarghezza dello spettro. Si procederà in seguito alla misura della rifrazione RLH per ogni colore nel modo seguente. Si misuri l'elevazione del punto L sopra il pavimento, e la sua distanza dalla parete MN con ogni possibile precisione; sia la prima $= q$, la seconda $= p$. Si calcoleranno due angoli mediante le due seguenti equazioni

$$\text{tang } \varphi = \frac{y - q}{p}; \quad \text{tang } \varphi' = \frac{q + Z}{p}.$$

Sarà evidentemente $\varphi = RLY$; $\varphi' = YLH$. Quindi $\mu = \varphi + \varphi'$. Ottenuto per i diversi colori dello spettro l'angolo della minima rifrazione μ , avremo per la formula (D) § 8 $m = \frac{\text{sen } \frac{1}{2}(\mu + \psi)}{\text{sen } \frac{1}{2}\psi}$.

12. I precetti del § precedente suppongono che ricevasi la luce solare direttamente per una piccola apertura, ed introducasi nella camera oscura per obbligarla ad attraversare l'angolo refringente del prisma. In questo caso richiedesi nell'osservatore una certa agilità e destrezza, perchè in virtù del moto diurno del sole le posizioni dell'immagine e dello spettro dentro la camera variano continuamente, e siccome ciò che più influisce nei risultati è la continua variazione dell'altezza del sole, quindi sarà lodevole cosa di fare queste osservazioni mentre il sole trovasi in gran vicinanza del meridiano. Del resto se l'apertura F sia molto piccola, l'immagine solare QP , e quindi lo spettro VR non cangiano sensibilmente di sito nell'intervallo di 2 minuti; tempo sufficiente per notare nel pavimento e nella parete l'estensione dell'immagine, e i confini dei varj colori.

Spesso accade che non si possa direttamente avere la luce solare dentro la camera oscura, ed allora vi si riflette mediante uno specchio piano che si applica all'estremità di un cilindro, e vi si rende mobile intorno a due perni per poterlo volgere in modo da introdurre i raggi del sole dentro il cilindro stesso. Si applica questo apparecchio all'imposta della finestra, e se nella base del cilindro rivolta nell'interno della camera si praticherà una piccolissima apertura, si verrà ad introdurre un tenue fascio di raggi luminosi, che per la mobilità dello specchio

si potrà dirigere verso quella parte che più piacerà. Si può eziandio allo specchio applicare un roteggio tale da muoverlo ed aggirarlo lentamente per modo, che rifletta sempre ad uno stesso punto i raggi solari, ed allora l'apparato prende il nome di *eliostata*. Tale macchina è in vero utilissima nelle esperienze ottiche, ma riesce costosa e complicata. Se ne può vedere la descrizione e la teoria nella fisica di S. Gravesande, che ne fu l'inventore (1).

Quando o coll'eliostata, o col nominato specchio siasi introdotto nella camera oscura il raggio luminoso, si noterà la posizione dell'immagine, indi se li presenterà l'angolo refringente del prisma per modo che il raggio di luce trovi in un piano perpendicolare ai suoi spigoli, e si aggiri lentamente nei suoi perni, finchè la rifrazione sia giunta al suo minimo. Segnati i confini dello spettro e dei suoi colori, si procederà a trovare la grandezza della rifrazione con metodi analoghi a quello che sopra abbiamo esposto.

13. Il chiarissimo padre Boschovich nelle sue opere stampate in Bassano l'anno 1785 Vol. I. prescrive, per determinare l'indice di rifrazione di un dato vetro, di arrottarne dei piccoli prismi di mediocri angoli refringenti; indi procede nel modo seguente. Mediante uno specchio introduce nella camera oscura un raggio tenuissimo, che egli rende orizzontale con una conveniente posizione data allo specchio medesimo. Presenta quindi il prisma cogli spigoli verticali al raggio luminoso, nel qual caso il piano in cui rimane lo spettro è orizzontale, ed avvolge il prisma finchè il raggio luminoso LM sia perpendicolare alla sua prima superficie BC (fig. 5); giudicasi della perpendicolarità dall'osservare, che i raggi riflessi dalla superficie BC ritornano in se stessi, e nel loro per cui vengono introdotti nella camera oscura. Allora il raggio luminoso passa irrefratto dentro del prisma, e continua senza risolversi in colori fino alla seconda superficie AB . Al punto Q in luogo di continuare per la linea retta QP , rifrangesi, e dividesi in colori prendendo la direzione QS , allontanandosi dalla perpendicolare QG condotta per Q alla superficie del prisma AB . Misurate con ogni esattezza le distanze PS , QS fino alla parete opposta, si ha la rifra-

(1) Vedasi l'Appendice in fine di questo Volume.

zione PQS , che indicheremo con μ dall'equazione

$\text{tang } \mu = \frac{PS}{QS}$; ottenuto μ , si ha l'angolo rifratto

$SQG = \varphi = SQP + PQG = \mu + \psi$. Quindi per il

numero 7 sarà $m = \frac{\text{sen } \varphi}{\text{sen } \psi} = \frac{\text{sen } (\mu + \psi)}{\text{sen } \psi}$.

Questo metodo è pregevolissimo per la sua semplicità e per la facilità con cui si possono istituire le osservazioni; si adopra con vantaggio nei piccoli prismi di un mediocre angolo refringente; ma se l'angolo ψ superasse $41^\circ 49'$, il raggio luminoso giunto in Q viene dalla superficie AB del prisma riflesso e non rifratto; quindi manca lo spettro solare, nè può determinarsi il numero m . In fatti dall'equazione precedente ritraesi $\text{sen } \varphi = m \text{sen } \psi$, e siccome pel vetro l'indice di rifrazione m è prossimamente $= \frac{3}{2}$, se l'angolo ψ , il quale nel presente caso uguaglia

l'angolo d'incidenza del raggio LQ sulla superficie AB supera l'indicato limite di $41^\circ 49'$, l'angolo φ diviene immaginario, poichè risulterebbe $\text{sen } \varphi > 1$. Non vi ha dunque rifrazione, ed invece viene questa cangiata in una riflessione.

Generalmente tutte le volte che un raggio luminoso sta per ripassare dal vetro nell'aria, se l'angolo d'incidenza supera questo limite, non viene rifratto, ma indietro riflesso, e nelle vicinanze di questo limite la rifrazione si opera imperfettamente, imperciocchè i raggi violetti vengono prima di tutti riflessi, quindi quelli dell'indaco, e così successivamente fino ai raggi rossi, che sono gli ultimi a sparire dallo spettro, come diffusamente dimostrasi nei trattati di fisica.

14. Sebbene l'indice di rifrazione m varii notabilmente nelle diverse specie di vetri, si può tuttavia ritenere che nel vetro comune dietro li risultati di Newton e dei Fisici posteriori abbia sensibilmente i seguenti valori nelli diversi colori dello spettro solare.

1.° Dal confine inferiore dei raggi rossi fino al confine degli aranciati, m compreso fra 1,5400 ed 1,5425.

2.° Dal confine degli aranciati fino al confine dei gialli, m fra 1,5425 ed 1,5440.

3.° Dal confine dei gialli fino al confine dei verdi, m fra 1,5440 ed 1,54667.

4.° Per i raggi verdi fino al confine degli azzurri, m fra 1,54667 ed 1,5500.

5.° Per i raggi azzurri fino al confine dell'indaco, m fra 1,5500 ed 1,5533.

6.° Per i raggi di colore indaco fino al confine del violetto, m fra 1,5533 ed 1,5555.

7.° Dal confine inferiore del violetto fino al confine superiore, m da 1,5555 fino 1,5600.

Dall'esame di questi valori apparisce che i raggi di media rifrangibilità assoluta cadono fra i verdi e gli azzurri. Ma poichè la maggiore intensità di luce non cade in quella situazione dello spettro, ma bensì verso la terza parte dei raggi gialli, come osservò lo stesso Newton, e come con semplicissimo apparato ha dimostrato il signor Fraunhofer; così nei calcoli relativi alle macchine ottiche si ritengono verso quel punto i raggi di media refrangibilità per non dare troppa influenza ai raggi violetti, i quali per la loro debolezza ne hanno pochissima.

Quanto maggiore è la differenza dei valori singoli di m dal valore medio, tanto più grande è la separazione dei colori nello spettro, e quindi tanto maggiore è la dispersione operata dalla sostanza refringente. Ciò posto, se per una sostanza refringente l'indice medio di rifrazione sia $= m$, e quello relativo ad un altro colore sia $m + dm$, e per un'altra sostanza refringente le stesse quantità sieno m' , $m' + dm'$; le quantità dm , dm' sono proporzionali alle dispersioni operate da queste due sostanze; ed il numero $\frac{dm}{dm'}$ chiamasi *rapporto di dispersione*.

La precisione dei cannocchiali richiede che con ogni accuratezza conoscasì il rapporto di dispersione delle diverse qualità di vetro, con le quali si vogliono questi costruire. Apparisce dalle cose precedenti, che se accuratamente determinare si potessero i valori di m per ogni colore, si conoscerebbe con esattezza cziandio il rapporto di dispersione; ma la piccolezza dei valori di dm e dm' , e la indecisione dei limiti dei colori nello spettro lascia poca speranza di poter giungere ad una grande esattezza coi

metodi superiormente esposti. Riferiremo in appresso i metodi ingegnosi praticati da molti valenti fisici, e singolarmente dal padre Boscovich per determinare il rapporto di dispersione. Frattanto l'ordine richiede che parliamo del modo di osservare del signor Fraunhofer, e delle scoperte da esso fatte, le quali conducono ad una non isperata esattezza nella determinazione di questo elemento importante.

15. Questo ecl. Fisico di Monaco recentemente mancato a' vivi, direttore del grande Istituto Ottico di Benedict-baiern rinomato in tutta l'Europa per l'eccellenza e perfezione degli stromenti ottici di ogni genere che da esso furono in copia somministrati a pressochè tutti gli Osservatorj delle colte nazioni, potè più d'ogni altro conoscere quanto dalla esatta conoscenza degl'indici di rifrazione e di dispersione dei vetri dipendesse il perfezionamento delle macchine ottiche, e quindi si diede a bel principio allo studio di questa parte così interessante della fisica, e giunse con il suo modo di osservare, e con le sue scoperte ad un grado di precisione che non potevasi da bel principio nè pur sospettare. Rese conto di queste sue ricerche in una Memoria letta alla reale Accademia delle scienze di Monaco, la quale deve incontrarsi nel volume dei suoi Atti per gli anni 1814-1815. Duolmi grandemente di non poterla consultare nel suo originale, non trovandosi fra noi quella collezione. Quanto sono per dire intorno alle sue ricerche è estratto da una relazione dello stesso Fraunhofer inviata al chiarissimo signor Gilbert, già redattore della celebre opera periodica pubblicata in Lipsia sotto il titolo: *Annalen der Physik*, continuata dopo la morte di quell'illustre Professore di fisica dal signor di Poggendorf collo stesso ordine e titolo. Questa relazione è inserita nel volume 56 di questi Annali, corrispondente al 26 della nuova serie pag. 264 (annata 1817).

L'apparato del signor Fraunhofer riducesi in sostanza ad un teodolito ripetitore, costruito come vedesi nella fig. 7, nella quale un disco orizzontale situato avanti l'obiettivo del cannocchiale superiore porta il prisma per le osservazioni di rifrangibilità e dispersione. Mediante una specie di diottra da appoggiarsi sul disco si misurano l'angolo refringente del prisma, e l'angolo d'incidenza dei

raggi sulla sua prima superficie. Il prisma rimane alla distanza di circa $4\frac{1}{2}$ pollici parigini dal centro del teodolito. Può il prisma aggirarsi a piacere intorno al centro del disco, ed il cannocchiale avvolgersi intorno al centro del teodolito indipendentemente dal prisma. Introducendo quindi in una camera oscura mediante un eliostata un raggio luminoso in direzione orizzontale, e facendolo cadere sulla superficie anteriore del prisma, sorte dall'altra parte separato in colori, e si riceve dentro il cannocchiale. Dirigendo il cannocchiale sullo spettro prodotto dal prisma, e quindi direttamente sul centro dell'apertura si può misurare l'angolo di rifrazione per ogni colore con somma precisione e per la bontà delle divisioni, e per il vantaggio della ripetizione. Gli angoli misurati abbisognano di una piccola correzione per non essere il centro del disco che porta il prisma situato sullo stesso asse verticale in cui trovasi il centro del teodolito; di tale correzione abbisognano pure gli angoli d'incidenza. Il signor Fraunhofer nelle sue osservazioni disponeva sempre il prisma in quella situazione in cui lo spettro apparisce stazionario, circostanza dalla quale siamo assicurati, per ciò che si è detto al § 10, che il raggio incidente ed emergente fanno colle superficie del prisma angoli uguali, ed ha di più il vantaggio che porge l'indice di rifrazione senza la cognizione dell'angolo d'incidenza, quando accuratamente conoscesi l'angolo refringente del prisma ψ , e l'angolo di rifrazione μ . Questo apparato collocavasi in distanza di circa 24 piedi parigini dall'apertura che introduce nella camera oscura il raggio luminoso. Tale apertura aveva una tenuissima larghezza, imperciocchè sottendeva un angolo di $15''$; la sua altezza poi era di circa 36 minuti primi. Lo spigolo refringente del prisma era verticale, e quindi la rifrazione si operava in un piano orizzontale parallelo al piano del teodolito. L'oculare del cannocchiale fingesi disposto in modo da vedere distintamente l'apertura della finestra dal luogo in cui è collocato.

Osservando attentamente lo spettro solare mediante il cannocchiale del teodolito, quando per il lento girare del prisma era divenuto stazionario, vi scopri una moltitudine di linee parte più grosse, parte più sottili, alcune nere, altre chiare distribuite nei suoi diversi colori all'incirca

come vedesi disegnato nella *fig. 10*. In varj modi si assicurò il chiarissimo Autore che queste linee non dipendevano da un'ottica illusione, nè da imperfezioni dei vetri, ma occupavano ciascuna un posto determinato nello spettro, di modo che dipendevano dal concorso di raggi omogenei, ai quali compete una particolare refrangibilità; poichè si presentavano nello stesso ordine, comunque variesse l'angolo refringente del prisma, ed anche la sostanza di cui questo era composto, e solo variavano le loro scambievoli distanze. Non trovansi esse nei confini dei colori, ma quasi sempre da una parte e dall'altra si riscontra lo stesso colore, che per gradazioni insensibili viene continuamente alterandosi per passare da uno in un altro. Appariscono eziandio nel cristallo islandico tanto nella rifrazione ordinaria, quanto nella straordinaria. Non in tutti i colori si possono vedere con una stessa posizione dell'oculare; ma quando questo sia adattato per vedere distintamente le linee del colore rosso, conviene spingerlo indentro per vedere quelle del violetto, lo che si deve ripetere dalla maggiore rifrangibilità di questi, per cui vengono a rinnersi in un punto all'obbiettivo più vicino. Se s'ingrandisce l'apertura, per la quale entrano i raggi solari nella camera, divengono di più in più confuse le linee senza allontanarsi dalle loro posizioni; le più fine e deboli spariscono quasi del tutto se questa giunga a 40"; le più forti se oltrepassi un minuto. Ciò facilmente si spiega dall'Autore nel modo seguente. Le linee più forti hanno da cinque sino a dieci secondi di diametro; se l'apertura nella finestra nonsia così debole che la luce per essa introdotta si possa riguardare come un solo raggio, e la di lei larghezza angolare superi notabilmente quella delle linee, da ciascun punto della larghezza partono raggi di luce che si decompongono nel prisma, e producono nello spettro simili linee che si dipingono le une sulle altre, od in gran vicinanza; con ciò divengono sempre più confuse, e spariscono, quando l'apertura sia troppo grande.

Osservò inoltre Fraunhofer che aggirando lentamente il prisma, finchè lo spettro cominci a muoversi, le linee si rendono successivamente più confuse, e spariscono del tutto, e per vederle in questa circostanza conviene alterare la posizione dell'oculare. Di ciò facilmente si

scorge la ragione quando riflettasi che essendo lo spettro stazionario, i raggi di luce sortono dal prisma colla stessa scambievole inclinazione con cui ci entrarono, e siccome per ipotesi l'oculare è disposto in modo da vedere distintamente l'apertura della finestra da cui emenano, così in questa circostanza si riuniscono nel foco dell'oculare; ma se aggirisi il prisma, i raggi sortono divergendo da un punto o più lontano, o più vicino; dall'obbiettivo non sono più riuniti esattamente nel foco dell'oculare, e però la visione è confusa, a meno che non si accomodi alla nuova divergenza dei raggi la posizione dell'oculare medesimo.

16. Per ciò che riguarda la posizione, figura e numero di queste linee nello spettro solare, crediamo di far cosa grata ai nostri lettori, ed a tutti coloro che ripetere vorranno siffatte osservazioni di riferire le parole stesse dell'Autore estratte dalla citata relazione, e tradotte nella nostra italiana favella.

» Lo spettro prismatico del sole si presenta rapporto
 » a queste linee come ho procurato di disegnarlo nell'u-
 » nita figura; egli è pressochè impossibile in questa scala
 » lo esprimere tutte le linee e la loro luce (1). Presso *A*
 » circa trovasi l'estremo rosso, e presso *I* l'estremo vio-
 » letto dell'immagine; un confine preciso non si può as-
 » segnare con sicurezza da nessuna parte, più facilmente
 » però nel rosso che nel violetto. Se venga esclusa ogni
 » traccia di luce immediata o riflessa dallo specchio, i con-
 » fini da una parte sembrano cadere fra *G H*, dall'altra
 » verso *B*. Con una luce solare di grande intensità lo spet-
 » tro diviene quasi per la metà più lungo, ma per poterne
 » vedere questa maggiore estensione si deve impedire che
 » la luce fra *C* e *G* giunga all'occhio, perchè l'impres-
 » sione nell'occhio fatta dalla luce nei confini dello spet-
 » tro è molto debole, ed è dal rimanente cancellata. In
 » *A* si riconosce una forte e ben terminata linea; tuttavia
 » qui non trovasi il confine del colore rosso, anzi ne è sen-
 » sibilmente lontano; presso *a* sonovi ammassate mol-
 » te linee che formano una striscia. *B* è una linea ben

(1) La figura 10 da noi riferita è fedelmente copiata da quella inserita in fine della relazione del signor Gilbert. Avverto però che è ridotta alla metà dal disegno originale del signor Fraunhofer.

terminata, e di notevole grossezza; nello spazio fra *B* e
C si possono contare 9 linee molto fine e ben contor-
 nate. La linea *C* è di notevole forza, e come *B* molto
 nera. Nello spazio fra *C* e *D* io contai circa 30 linee
 molto sottili, le quali, ad eccezione di due, non possono
 chiaramente vedersi (siccome anche quelle fra *B* e *C*)
 che con forti ingrandimenti, o con prismi molto disper-
 denti; del resto sono molto ben contornate. *D* si costi-
 tuisce da due forti linee separate soltanto da una linea
 chiara; fra *D* ed *E* io contai circa 84 linee di diversa
 forza. *E* risulta da molte linee, delle quali quella del
 mezzo è un poco più forte delle altre; fra *E* e *b* si nu-
 merano circa 24 linee; in *b* vi sono 3 forti linee di cui
 due sono separate da una debole linea chiara; esse ap-
 partengono alle più forti dello spettro; nello spazio fra
b, *F* ne numerai circa 52; la linea *F* è alquanto forte;
 fra *F* e *G* si numerano circa 185 linee di diversa inten-
 sità; in *G* sono ammassate molte linee, fra le quali
 alcune si distinguono per la loro forza; nello spazio fra
G ed *H* io contai circa 190 linee molto differenti di
 forza. Le due striscie presso *H* sono singolarissime; so-
 no quasi interamente uguali, e nel loro mezzo trovasi
 una forte linea molto nera. Da *H* verso *I* le linee sono
 del pari numerose. Si possono quindi contare nell'inter-
 vallo fra *B* ed *H* circa 574 linee, delle quali ho potuto
 soltanto indicare le più considerabili nel disegno. Ho
 misurato col teodolito le distanze scambievoli delle linee
 più forti, e le ho riferite nel disegno dietro i rapporti
 delle misure ottenute; ma le linee più deboli senza esatta
 misura sono state inserite nel disegno dietro una sem-
 plice stima dell'ispezione dello spettro.

17. Il signor Fraunhofer osservò allo stesso modo lo
 spettro prodotto dalla luce di una candela, che egli intro-
 duceva per la stessa apertura, e faceva cadere sul prisma;
 ma in questo non scoprì quelle linee che osservate aveva
 nello spettro solare, e solo trovò una linea chiara situata
 nel colore aranciato nel medesimo luogo occupato dalla li-
 nea *D*. Variò l'apertura per la quale introducevasi il
 raggio luminoso, rendendola un piccolo foro circolare di
 15^o di diametro. In questo caso lo spettro avendo una
 piccolissima larghezza, le linee anche dello spettro solare

non si potevano per la loro brevità riconoscere. Per aumentare la larghezza dello spettro senza far variare la sua lunghezza, lo ricevè in un mezzo cilindro di cristallo la cui parte piana era rivolta verso il prisma e la parte convessa, che era di figura circolare di gran diametro verso l'obiettivo del cannocchiale; l'asse del cilindro esattamente parallelo alla base del prisma refringente. Aumentandosi con tal mezzo la larghezza dello spettro ricomparvero le linee medesime sopra osservate e descritte.

Si servì dello stesso apparato per esaminare lo spettro prodotto dalla luce di Venere e di alcune più belle stelle, come anche dalla luce dell'elettricità. Dalle sue ricerche sopra questo interessante argomento pubblicate in quella sua prima dissertazione, ed in seguito in un'appendice alle sue Memorie intorno alla diffrazione della luce, di cui ne diedi già una relazione sufficientemente estesa nell'opera periodica che per due anni si pubblicò qui sotto il titolo di *Biblioteca germanica* (Vol. I. p. 242, VI. 324) risulta 1.° che la luce della luna e dei pianeti produce uno spettro in tutto e per tutto simile a quello della luce solare, e da questo non differisce che per la sua debolezza, onde accade che non si possano riconoscere se non le linee più forti; 2.° che la luce dell'elettricità produce pure uno spettro, in cui si riconoscono delle strisce e linee fisse; ma la loro posizione è del tutto diversa da quella delle linee dello spettro solare; 3.° che la luce delle stelle produce pure uno spettro in cui le linee sono a diverse posizioni di quelle scoperte nello spettro solare dei pianeti e dell'elettricità, che in generale non sembrano fra loro assomigliarsi gli spettri prodotti dalla luce delle diverse stelle; 4.° che quanto alle rifrazioni non esiste differenza sensibile, sia che la luce emani dal sole, dai pianeti o da una stella qualunque, come egli ha provato mediante un ingegnoso apparato, di cui leggesi la descrizione nell'ultima sua relazione intorno alle leggi della diffrazione della luce inserita negli Annali di fisica di Gilbert per l'anno 1823 vol. 74; 5.° che la luce di una fiamma avvivata dal soffio di un cannello contiene nel suo spettro molte linee chiare; 6.° che la parte anteriore di questa luce è composta di raggi omogenei non decomponibili dal prisma, scoperta interessantissima per molte ottiche ricerche, per-

chè col prisma non si può ottenere luce omogenea, ed è in generale molto difficile procurarsela radiante in qualunque direzione.

18. Ritornando ora al nostro principale argomento di determinare l'indice di rifrazione e di dispersione di diverse paste di vetri, da se si appalesa il vantaggio delle linee fisse dello spettro solare sopra descritte, in quanto si possono esse sostituire ai limiti dei colori sempre incerti e male determinati. Si applicò il sig. Fraunhofer particolarmente a misurare l'angolo di rifrazione per i raggi costituenti le linee *B, C, D, E, F, G, H* situate verso i confini dei diversi colori, riferendole alla linea *D*, la quale ha il vantaggio di essere situata in gran vicinanza del luogo più luminoso dello spettro, e di corrispondere esattamente alla linea unica osservata nello spettro della fiamma di una candela. Per ben comprendere come si debbano instituire le osservazioni, e quali riduzioni si debbano ad esse applicare, consideriamo la *fig. 8*, nella quale supponiamo che *F* rappresenti il centro dell'apertura per cui entra il raggio luminoso nella camera oscura; *FA* un raggio di luce che dal prisma *Q* è rifratto, ed obbligato a descrivere la linea spezzata *FAGO* nel caso in cui lo spettro apparisce stazionario. Fingasi il raggio emergente prolungato in *L* incontrando in *I* il prolungamento di *FA*; l'angolo *LIF* rappresenta la minima rifrazione relativa al raggio *FA* che si dovrebbe misurare. Rappresenti *O* il centro del teodolito, attorno di cui gira l'asse del cannoecchiale, entro il quale ricevesi lo spettro. Portando successivamente il cannoecchiale nella direzione del raggio emergente *OG*, e sul centro dell'apertura *F*, le divisioni del teodolito danno l'angolo *LOF*, da cui si ottiene l'angolo cercato *LIF*, sommandovi l'angolo *IFO*.

Quest'ultimo angolo si troverà nel modo seguente. Si misurerà con la maggiore possibile precisione la distanza *IO* del centro del disco, su cui si avvolge il prisma dal centro del teodolito, la quale nell'apparato di Fraunhofer era di 4,25 pollici; indi la distanza *FI*; dopo ciò il triangolo *FIO* darà $\text{sen } F = \frac{OI}{FI} \text{ sen } O$. Apparisce di qui che la correzione *F* sarà tanto più piccola, quanto minore sarà *OI* rapporto a *FI*, e sparirebbe per intero

se fosse $OI = 0$, cioè se il prisma refringente girasse sul centro stesso del teodolito.

Per evitare l'incertezza di questa correzione, che nel suo apparato situato alla distanza di soli 24 piedi dall'apertura F diveniva assai forte, il signor Fraunhofer determinava per ogni prisma l'angolo LIF relativo alla linea D mediante lo spettro prodotto da una lampada situata alla distanza di 693 piedi, per cui la correzione era molto minore, ed a questo poi riferiva tutti gli altri, prendendo col teodolito le distanze angolari BC , CD , DE ec.

Per ultimo gli stessi metodi e lo stesso apparecchio danno l'indice di rifrazione dei diversi fluidi se al prisma di vetro solido sostituisce un vase composto di lastre di vetro piane, le cui due superficie sieno esattamente parallele, congiunte con un mastice in modo da formare un prisma triangolare internamente vuoto. Se riempiasi del fluido, di cui vuolsi sperimentare l'indice di rifrazione, in allora il raggio solare sarà unicamente rifratto per l'azione del fluido in grazia del parallelismo supposto dalle superficie delle lastre di vetro, e si procederà all'osservazione delle rifrazioni nella stessa maniera di sopra indicata pel vetro.

19. Ottenuto per una determinata sostanza l'angolo LIF della minima rifrazione per il raggio D , e le misure angolari BC , CD , DE ec. si chiami μ l'angolo LIF per D ; $\downarrow$ l'angolo refringente del prisma, Bm l'indice di rifrazione per i raggi relativi alla linea B , Cm per i raggi C , e così degli altri. Avremo per il § 11

$$Bm = \frac{\text{sen } \frac{1}{2}(\mu + \downarrow - BC - CD)}{\text{sen } \frac{1}{2} \downarrow}; \quad Cm = \frac{\text{sen } \frac{1}{2}(\mu + \downarrow - CD)}{\text{sen } \frac{1}{2} \downarrow}$$

$$En = \frac{\text{sen } \frac{1}{2}(\mu + \downarrow + DE)}{\text{sen } \frac{1}{2} \downarrow}; \quad Fn = \frac{\text{sen } \frac{1}{2}(\mu + \downarrow + DE + EF)}{\text{sen } \frac{1}{2} \downarrow}$$

e così degli altri.

Determinati poi nelle diverse sostanze gl'indici di rifrazione per i diversi raggi, si avrà tosto il rapporto della loro dispersione dietro i precetti esposti al § 14.

Noi crediamo di fare cosa grata ai nostri lettori riferendo qui i risultati delle osservazioni del signor Fraunhofer sopra tale argomento, i quali potranno essere utili a quelli che volessero applicarsi alla costruzione di buoni canocchiali, e servire di norma per simili indagini sopra altre sostanze, e sopra altre paste di vetro.

TAVOLA I.

Mezzi refringenti	Term. di Reaum.	Peso speci- fico	Angolo del prisma = μ	Rifrazione per il raggio $D = \mu$	BC	CD	DE	EF	FG	GH
Flint Glas N. 13. . .	15°	3,725	20° 24' 50"	17° 27' 8"	5' 16"	9' 4,2	11' 50"	10' 53,9	20' 25,9	18' 18,0
Crown Glas N. 9 . .	14	2,535	59 20 35	22 38 19	2 44,5	7 25,5	9 14	8 14,0	15 10,0	15 18,0
Acqua	15	1,000	58 5 40	22 56 40	5 24,0	8 10,0	9 58	8 58	15 16	12 41,9
Acqua	15	1,000	58 5 40	22 56 40	5 12,4	8 10,6	9 57,5	8 50,5	15 15,6	12 46,2
Soluz. di Kali nell'acqua		1,416	58 5 40	27 45 56	4 2,0	10 26,0	12 54,0	11 12,0	20 56,0	17 24,0
Olio di Terebintina. .	9 $\frac{1}{4}$	0,885	58 5 40	35 20 12	4 56	15 52	18 46,1	16 14	31	27 28
Flint Glas N. 5. . .	8 $\frac{1}{4}$	3,512	27 41 35	17 35 16,6	5 8	8 22	10 46	9 50	19 10	17 10
Flint Glas N. 30. . .	..	3,695	21 42 15	14 5	2 35,6	6 56,8	9 12,6	8 19	16 15,6	14 52,2
Crown Glas N. 13. . .	..	2,535	43 27 36	25 26 53,4	5 5	8 14,4	10 28,2	9 10	17 14	14 48,4
Crown Glas lutt. M. . .	..	2,756	42 56 40	26 59 15	5 52,8	9 37,6	12 29,8	11 1,6	20 57,6	18 17,4
Flint Glas N. 25. . .	..	3,724	60 15 42	49 55 15,2	11 12,6	31 14,8	11 21,4	38 14,8	74 45,2	68 5,6
Flint Glas N. 25. . .	..	3,724	45 23 14	32 45 12,2	8 26,0	17 47,8	25 31,8	21 25,8	41 55,4	37 28,8

T A V O L A II.

*Indici delle rifrazioni, ossia valori di m, dedotti dalla Tavola I.
dietro il calcolo delle superiori equazioni.*

Sostanze refringenti	B n	C n	D n	E n	F n	G n	H n
Flint N. 13.	1,627749	1,629681	1,635036	1,642024	1,648260	1,660285	1,671062
Crown N. 9.	1,525832	1,526849	1,529587	1,533005	1,536052	1,541657	1,546566
Acqua.	1,330935	1,331712	1,333577	1,335851	1,337818	1,341293	1,344177
Acqua.	1,330977	1,331709	1,333577	1,335849	1,337788	1,341261	1,344162
Kali.	1,399629	1,400515	1,402805	1,405632	1,408682	1,412579	1,416368
Olio di Tremantina.	1,470496	1,471530	1,474434	1,478353	1,481736	1,488198	1,493874
Flint N. 3.	1,602042	1,603800	1,608494	1,614532	1,620042	1,630772	1,640373
Flint N. 30.	1,623570	1,625477	1,630585	1,637356	1,643466	1,655406	1,666072
Crown N. 13.	1,524312	1,525299	1,527982	1,531372	1,534337	1,539908	1,544684
Crown litt. M.	1,554774	1,555933	1,559075	1,563150	1,566741	1,573335	1,579470
Flint N. 23. Prisma di 60°.	1,626596	1,628469	1,633667	1,640495	1,646756	1,658848	1,669686
Flint N. 23. Prisma di 45°.	1,626564	1,628451	1,633666	1,640544	1,646780	1,658849	1,669680

T A V O L A III.

Rapporti della dispersione dei diversi raggi nelle seguenti

Sostanze refringenti	$\frac{C^u - B^u}{C^u - B^u}$	$\frac{D^u - C^u}{D^u - C^u}$	$\frac{E^u - D^u}{E^u - D^u}$	$\frac{F^u - E^u}{F^u - E^u}$	$\frac{G^u - F^u}{G^u - F^u}$	$\frac{H^u - G^u}{H^u - G^u}$
Flint N. 13. — Acqua . .	2,562	2,871	3,073	3,193	3,460	3,726
Flint N. 13. — Crown N. 9.	1,900	1,956	2,044	2,047	2,145	2,195
Crown N. 9. — Acqua . .	1,349	1,468	1,503	1,560	1,613	1,697
Olio di Tremont. — Acqua .	1,371	1,557	1,723	1,732	1,860	1,963
Flint N. 13. — Olio di Trem.	1,868	1,844	1,783	1,843	1,861	1,899
Flint N. 13. — Kali . . .	2,181	2,338	2,472	2,545	2,674	2,844
Kali — Acqua	1,175	1,228	1,243	1,254	1,294	1,310
Olio di Tremontina — Kali.	1,167	1,268	1,386	1,381	1,437	1,498
Flint N. 3. — Crown N. 9.	1,729	1,714	1,767	1,808	1,914	1,956
Crown N. 13. — Acqua .	1,309	1,436	1,492	1,518	1,604	1,651
Crown lit. M. — Acqua .	1,537	1,682	1,794	1,839	1,956	2,052
Crown lit. M. — Cr. N. 13.	1,174	1,171	1,202	1,211	1,220	1,243
Flint N. 13. — Crown lit. M.	1,667	1,704	1,715	1,737	1,770	1,816
Flint N. 3. — Crown lit. M.	1,517	1,494	1,482	1,534	1,579	1,618
Flint N. 30. — Crown N. 13.	1,932	1,904	1,997	2,061	2,143	2,233
Flint N. 23. — Crown N. 13.	1,904	1,940	2,022	2,107	2,168	2,268

Quest' ultima tavola porge i rapporti della dispersione di diverse paja di sostanze refringenti ricavati dai numeri della tavola II., fingendo in ogni caso le quantità accentate relative alla sostanza dotata di maggiore forza refringente. Dalla inspezione dell' ultima tavola apparisce, che i rapporti di dispersione in alcune sostanze variano fortemente pei diversi colori, mentre per altre le variazioni sono molto minori. Il signor Fraunhofer ha potuto facilmente osservare, che gl' indici di rifrazione nelle sostanze fluide variano fortemente col variare della temperatura, lo che deve far rinunziare alla speranza di costruire dei buoni cannocchiali acromatici impiegando sostanze fluide racchiuse fra vetri, ed escludendo il Flint combinato col Crown dietro quei precetti che saremo per esporre in seguito. Pare quindi opera perduta il tentativo da alcuni valenti fabbricatori rinnovato in questi ultimi tempi per costruire dei cannocchiali acromatici mediante i fluidi, e piuttosto sembra opportuno che coloro i quali trovansi alla direzione di grandi fabbriche si occupino della fusione di diversi vetri, nei quali il rapporto della dispersione per i diversi colori si avvicini quanto è possibile ad essere costante.

Intensità della luce nei diversi colori dello spettro solare, e del medio rapporto di dispersione.

20. Siccome ciascun colore dietro i risultati precedenti è variamente distratto e separato, così se venga proposto con due diversi vetri di distruggere la dispersione dei colori per produrre immagini chiare e precise, facilmente si scorge non potersi soddisfare con tutto il rigore a tale questione, come meglio apparirà quando tratteremo degli oggettivi acromatici. Si può proporre un quesito di somma importanza, ed è di determinare qual rapporto di dispersione debbasi adottare perchè le immagini risultino le più chiare e precise possibili, quando ogni aberrazione non possa distruggersi. È chiaro per se che i colori più deboli meno dei colori più forti turberanno la precisione delle immagini, e quindi se una qualche aberrazione deve pur rimanere, conviene portarla sopra i colori meno vivaci e splendenti, e perciò di sommo interesse sono le ricerche

istituite dal signor Fraunhofer per determinare il rapporto dell'intensità della luce nei varj colori dello spettro prismatico, nelle quali fece uso del seguente ingegnoso apparato.

In un oculare a bella posta costruito per il cannocchiale del suo teodolito fissò in faccia alla lente oculare nel luogo in cui si formano (*fig. 9*) le immagini prodotte dall'obbiettivo un piccolo specchio piano di metallo *a*, inclinato di 40° alla direzione dell'asse ottico del cannocchiale, di tali dimensioni da occupare esattamente la metà del campo, ed avente il lembo bene affilato e verticale. Il tubo delle lenti oculari è aperto in faccia a questo specchietto, e vi si applica a vite un lungo cilindro vuoto ed annerito internamente, entro il quale scorre una piccola lucerna ad olio *b*, che si può condurre a diverse distanze dallo specchio, ed il cui lume si diffonde sulla superficie dello specchietto per una piccola apertura, e viene da esso rimandato all'oculare. Introducendo ora dentro il cannocchiale lo spettro solare, si vede metà del campo occupata dallo specchio illuminato dalla fiamma, mentre che nell'altra metà sono visibili i colori dello spettro prismatico. Conducendo successivamente ogni colore in vicinanza al lembo dello specchietto, si avvicina e si allontana il lume *b* finchè le intensità del lume diffuso sopra lo specchio, e dello spettro solare veduti entrambi per lo stesso oculare compariscano eguali; gl'inversi rapporti dei quadrati delle distanze sono uguali ai rapporti delle intensità della luce. Ecco i risultati ottenuti dal più volte lodato Fisico con questo suo apparato, facendo uso di un prisma di Flint N. 13, il cui angolo refringente era $= 26^\circ 24', 5$, ed assumendo per unità l'intensità della luce nel luogo più chiaro.

Intensità della luce	I. osserv.	II. osserv.	III. osserv.	IV. osserv.	Medio
presso <i>B</i> .	0,010	0,044	0,053	0,020	0,032
<i>C</i> .	0,048	0,096	0,15	0,084	0,094
<i>D</i> .	0,61	0,59	0,72	0,62	0,64
fra <i>D</i> ed <i>E</i>	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
presso <i>E</i> .	0,44	0,38	0,61	0,49	0,48
<i>F</i> .	0,084	0,14	0,25	0,19	0,17
<i>G</i> .	0,010	0,029	0,053	0,032	0,031
<i>H</i> .	0,0011	0,0072	0,0090	0,0050	0,0056

Il luogo più chiaro cade fra *D* ed *E* (fig. 10) ad $\frac{1}{3}$, o $\frac{1}{4}$ circa dell'intervallo *DE* procedendo da *D* verso *E*. Dalla curva unita alla stessa figura viene rappresentata l'intensità della luce nei diversi colori. Le ascisse sono gl' intervalli *BC*, *CD* misurati col teodolito nel prisma di Flint N. 13 di $26^{\circ} 24'$; le ordinate sono i precedenti valori dell'intensità; il rapporto fra le ascisse e le ordinate è determinato dietro la supposizione che gli spazj curvilinei corrispondenti a *BC*, *CD* ec. rappresentino la quantità della luce in ciascun colore, supposta quella distribuita nello spazio *DE* = 1. La quantità della luce nei diversi spazj, giusta il risultato dell'Autore (1), è rappresentata dai seguenti numeri:

$$\begin{array}{ll}
 \text{nello spazio } BC = 0,021 & \text{nello spazio } EF = 0,328 \\
 CD = 0,299 & FG = 0,185 \\
 DE = 1,000 & GH = 0,035.
 \end{array}$$

(1) Considerando gli spazj curvilinei come trapezj, e valutando *BC*, *CD* in parti dell'intervallo *DE*, trovo i rapporti dei medesimi spazj curvilinei allo spazio insistente sopra *DE*, e quindi i rapporti delle quantità di luce, come i seguenti numeri:

$$\begin{array}{ll}
 \text{nello spazio } BC = 0,025 & \text{nello spazio } EF = 0,378 \\
 CD = 0,568 & FG = 0,231 \\
 DE = 1,000 & GH = 0,057
 \end{array}$$

cioè un poco maggiori di quelli dati dal signor Fraunhofer. La differenza però rimane sempre piccola e trascurabile.

Conosciuto il rapporto dell'intensità dei raggi luminosi nei diversi colori se ne può trarre un partito vantaggioso per giudicare quale fra i diversi rapporti di dispersione debba adoprarsi nei calcoli ottici, quando vuolsi formare un sistema di vetri acromatico. Trattando degli obbiettivi acromatici dimostreremo non essere possibile riunire con due diverse specie di vetri in un sol punto tutti i raggi eterogenei in grazia della quantità di dispersione diversa per ciascheduno; e però sarà necessario di appigliarsi al partito di riunire i raggi rossi coi raggi più forti situati fra D ed E , lasciando sussistere una qualche deviazione pei violetti, che come più deboli producono errori tollerabili all'occhio, o di stabilire un medio rapporto di dispersione da introdursi nelle condizioni dell'acromatismo. Prendendo un medio assoluto fra i rapporti di dispersione si concederebbe troppa influenza ai raggi più deboli; sembra quindi plausibile assumere che le dispersioni dei raggi nuocano alla chiara visione in ragione inversa della intensità della luce. Chiamando pertanto x il rapporto medio di dispersione; $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \xi$ i rapporti dell'intensità della luce negli spazj $BC, CD, DE \dots$ ed a, b, c, d, e, f i rapporti di dispersione negli stessi spazj relativi a due date specie di vetri, come sono riferiti nella tavola III., dovrà essere

$$(\alpha + \beta + \gamma + \epsilon + \xi) x = (a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta + f\xi)$$

dalla quale equazione, tosto si ottiene il valore di x cercato. Applicando questo precetto al Flint N. 3o combinato col Crown N. 13 (tav. III.) trovasi $x = 2,012$. Frattanto il signor Fraunhofer avverte di avere coll'esperienza riscontrato che negli obbiettivi composti di questi due vetri le aberrazioni di rifrangibilità erano meglio distrutte ponendo $x = 1,98$, numero molto vicino al valore di $\frac{E n' - D n'}{E n - D n}$ (tav. III.), e perciò i raggi più deboli devono influire un poco meno di quello che comporti l'inversa ragione della loro densità.

Viaggio del raggio luminoso per due prismi di diverso potere refringente. Del vitrometro di Boschovich.

21. I metodi da noi riferiti nei paragrafi precedenti per determinare l'indice di rifrazione, e la quantità della dispersione operata da diverse sostanze conducono senza dubbio alla massima esattezza; ma non si deve negare che non richiedano una certa destrezza nell'osservare non comune a tutti, ed uno stromento esatto, costoso e difficile ad ottenersi. Ci faremo quindi ad esporre altri metodi più ovvj e più facili a porsi in pratica dalla maggior parte degli artisti, nel che invero senza nocimento della chiarezza saremo brevi, rimandando per ulteriori dettagli e per ogni minuta descrizione alle opere del padre Boschovich citate di sopra, dove queste materie trovansi trattate con tutta l'estensione e chiarezza.

Per procedere con ordine, richiameremo i due seguenti lemmi della fisica generale.

1.^o *Se un raggio luminoso MP (fig. 11) qualunque attraversa un mezzo refringente terminato da superficie parallele AB, CD , la sua nuova direzione QF sarà parallela alla PM , supponendo che al di sopra di AB , e al disotto di CD vi sia uno stesso mezzo, per es. aria.*

Condotta in fatti per i punti P, Q le perpendicolari ZZ', QX alle superficie AB, CD , queste saranno parallele, e fingendo che $MPQF$ sia la via del raggio luminoso, sarà, se m è l'indice di rifrazione per il mezzo $ABCD$,

$$\text{sen } ZPM : \text{sen } QPZ :: m : 1$$

$$\text{sen } IQP : \text{sen } FQX :: 1 : m$$

Moltiplicando per ordine, ed osservando che per le parallele gli angoli IQP, QPZ sono eguali, si avrà
 $\text{sen } ZPM = \text{sen } FQX$; perciò FQ riesce parallela a PM .

Risulta da questo primo lemma che un fascetto di luce bianca sortirà da un mezzo terminato da superficie piane, parallele e molto vicine in un fascetto di luce pure bianca, e nulla sarà la rifrazione operata dal mezzo interposto. Lo stesso accaderà se si faccia passare il raggio luminoso per più sottili strati terminati da superficie parallele, quantunque composti di diverse sostanze refringenti.

2.° Se si abbiano due mezzi A, B tali che per il primo l'indice di rifrazione, ossia il rapporto fra il seno dell'angolo d'incidenza e dell'angolo rifratto pel passaggio dall'aria in A sia $= m$, e per il secondo nella stessa circostanza sia $= m'$, quando il raggio luminoso passa direttamente da A in B , il rapporto fra il seno d'incidenza e dell'angolo rifratto sarà $= \frac{m'}{m}$.

Sieno i due mezzi separati da un sottilissimo strato d'aria a facce parallele, la quale circostanza per il lemma precedente non cangia il viaggio del raggio luminoso, e sia (fig. 11) $AZPM$ il mezzo A ; $ABCD$ il sottilissimo strato d'aria; CFX il mezzo B . Pongasi l'angolo d'incidenza $ZPM = i$; l'angolo $FQX = r$; l'angolo $QPZ = IQP = \phi$. Sarà dietro le assunte denominazioni $\frac{\text{sen } i}{\text{sen } \phi} = \frac{1}{m}$; $\frac{\text{sen } \phi}{\text{sen } r} = m'$; moltiplicando queste due eguaglianze si ottiene $\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{m'}{m}$, lo che dà $\text{sen } i : \text{sen } r :: m' : m$.

22. Premesse queste cose, venghiamo a considerare il viaggio di un raggio isolato qualunque per un sistema di due prismi addossati l'uno all'altro per modo che gli angoli refringenti sieno contrapposti. Considereremo da bel principio gli angoli refringenti dei prismi come molto piccoli od uguali ai loro seni, ad oggetto di presentare regole semplici e di facile applicazione per gli artefici; infine poi esporremo le equazioni rigorose che determinano il viaggio di un raggio luminoso attraverso di un qualunque sistema di prismi. Sia pertanto (fig. 12) $ABCO$ la sezione fatta da un piano perpendicolare alle coste dei prismi; $ABC = \angle$ l'angolo del primo prisma, $BCO = \angle$ l'angolo refringente del secondo prisma; $DEFGH$ rappresenti il viaggio del proposto raggio che dall'aria entra nei due prismi, e poi ritorna lungo GH nell'aria; PQ, QR, RS sieno le perpendicolari condotte per i punti d'ingresso, e sortita alle superficie dei prismi; le lettere a, b, a', b', a'', d rappresentino come la figura indica gli angoli incidenti e rifratti. Sia inoltre $m : 1$ il rapporto fra il seno d'incidenza e dell'angolo rifratto nella sostanza del

primo prisma per il passaggio dall'aria nel vetro; $m' : 1$ lo stesso rapporto per la sostanza del secondo prisma; sarà (§ 21) $m' : m$ il rapporto fra i seni degli angoli d'incidenza e di rifrazione per il passaggio del raggio luminoso dal primo nel secondo prisma.

Nell'assunta ipotesi di angoli refringenti di un piccolo numero di gradi, potremo come nel § 8 sostituire ai seni degli angoli a, b, a', b', a'', d gli angoli medesimi, e perciò successivamente si troverà $b = \frac{a}{m}$; essendo

$a' + b = \psi$, sarà $a' = \psi - b = \psi - \frac{a}{m}$. Avremo in

seguito $a' : b' :: m' : m$; quindi $b' = \frac{m a'}{m'} = \frac{m \psi}{m'} - \frac{a}{m'}$, e

poichè $a'' = \psi' - b'$; sarà $a'' = \psi' - \frac{m \psi}{m'} + \frac{a}{m'}$; final-

mente essendo $a'' : d :: 1 : m'$ sarà $d = a'' m'$, donde sostituendo per a'' il suo valore troveremo

$$d = m' \psi' - m \psi + a.$$

23. Se lo stesso ragionamento si applica successivamente a due raggi semplici dello spettro solare, per es. al rosso ed al violetto, i quali sotto uno stesso angolo d'incidenza a entrino nel prisma composto, ritenendo le denominazioni del § precedente come relative al raggio rosso, se supponiamo che D, M, M' rappresentino per il raggio violetto le quantità analoghe a quelle indicate da d, m, m' per il rosso, avremo $D = M \psi' - M \psi + a$. Quindi l'inclinazione scambievolmente dei raggi dopo la sortita dal prisma composto sarà

$$D - d = (M' - m') \psi' - (M - m) \psi,$$

dove $M - m, M' - m'$ sono le quantità dispersive dei vetri componenti il primo ed il secondo prisma. Appare di qui che se si ottenga $D - d = 0$, il raggio violetto ed il raggio rosso sortono uniti dal prisma composto, e se i rapporti di dispersione per tutti gli altri colori fossero i medesimi, è palese che sortirebbero sovrapposti tutti i raggi della luce bianca, e quindi le immagini sarebbero nuovamente bianche, e senza colori. Ora sebbene i rapporti di dispersione non sieno esattamente gli stessi per tutti i colori, in alcune paste di vetri, come nel

Crown e nel Flint molto si avvicinano all'eguaglianza, e perciò quando si ricongiungono il raggio rosso ed il raggio violetto, vengono sensibilmente ricongiunti anche gli altri, e quindi le immagini degli oggetti veduti attraverso il prisma composto risultano sensibilmente senza colori, quantunque spostate in virtù della rifrazione dal loro sito. Un sistema di vetri produttore immagini non colorate dicesi *acromatico*.

Da tutto ciò si deduce che due prismi di piccoli angoli refringenti contrapposti uno all'altro saranno acromatici, quando si abbia la proporzione

$$\psi' : \psi :: M - m : M' - m',$$

cioè quando *gli angoli refringenti sieno in ragione inversa delle dispersioni operate dai vetri di cui sono formati*.

Questa proprietà dei prismi è sottoposta, come ben si vede, alla condizione di angoli refringenti molto piccoli, ed alla eguaglianza dei rapporti di dispersione in tutta l'estensione dello spettro; quindi non si possono attendere immagini assolutamente acromatiche, soprattutto per la diversità dei rapporti di dispersione; ma poichè i raggi più deboli soltanto dietro l'ispezione della tavola III. notabilmente aberrano dalla media dispersione, se nella costruzione dei prismi si adoprerà il rapporto di dispersione competente ai raggi più luminosi situati fra *D* ed *E*, le immagini risulteranno sensibilmente acromatiche, non essendo per la loro debolezza gran fatto percettibile l'aberrazione dei violetti.

24. Si deduce dalla esposta proprietà del prisma composto un metodo molto comodo per esplorare il rapporto di dispersione di due diverse specie di vetri, il quale sebbene non sia dotato di tutta la precisione, è tuttavia utilissimo negli usi più comuni dell'ottica, ed è generalmente praticato dai più rinomati fabbricatori di cannocchiali acromatici.

» Del vetro meno disperdente costruisasi un prisma
 » di piccolo numero di gradi, per es. di 15° ; quindi se ne
 » formi un altro della seconda specie dotato di maggiore
 » forza dispersiva, e vengasi questo arrotolando in modo
 » da impiccolire l'angolo refringente finchè un raggio di
 » luce bianca forzato ad attraversare il prisma composto

» di questi due, sorta in un piccolo fascio di luce bianca, » e possibilmente scevra di colori; allora il rapporto degli angoli dei due prismi è anche il rapporto inverso » delle loro dispersioni ».

Così se siasi trovato che ad un prisma di Crown di 15° convien contrapporre un prisma di Flint di $7^\circ 36'$ per togliere la dispersione dei colori, ed ottenere immagini bianche, la dispersione del Flint, posta quella del Crown $= 1$, sarà $= \frac{15^\circ}{7^\circ 36'} = \frac{15^\circ}{7^\circ,6} = 1,974$ circa.

25. Lo stesso metodo si può applicare a determinare l'indice di rifrazione di una determinata specie di vetro, quando conoscesi quello di un altro vetro, di cui abbiasi costruito un piccolo prisma ABC (fig. 12). Si costruirà della specie incognita un altro prisma, di cui si andrà variando l'angolo refringente ψ , finchè nella disposizione della stessa figura il raggio emergente GH sia parallelo al raggio incidente DE , lo che si riconoscerà facilmente quando vedasi che il raggio emergente si dirige nell'opposta parete allo stesso luogo a cui dirigevasi il raggio incidente DE prima di riceverlo nei due prismi. In questo stato di cose è evidente che l'angolo d dovrà essere $= a - (\psi - \psi')$; in fatti se per il punto O guidasi una retta parallela ad AB , farà con OC un angolo $= \psi - \psi'$, e però le rette RS , PQ comprenderanno uno stesso angolo. Condotta dunque per il punto G una parallela a PQ , questa farà con RS un angolo $= \psi - \psi'$; però sarà $d = a - (\psi - \psi')$. Ora (§ 22) era $d = m' \psi' - m \psi + a$; sostituendo per d il suo valore, otterremo l'equazione $(m' - 1) \psi' = (m - 1) \psi$, dalla quale ricavasi $m' - 1 = \frac{(m - 1) \psi}{\psi'}$.

26. L'incomodo gravissimo a cui va sottoposto questo metodo è quello di diminuire continuamente l'angolo di uno dei due prismi finchè giunga a distruggere la rifrazione o dispersione dell'altro che tienti fisso. Si può riparare a questo inconveniente mediante l'uso di un prisma ad angolo variabile costruito o con un vetro di cui conoscesi l'indice della rifrazione e della dispersione, o con un fluido racchiuso in una cassa prismatica, le cui facce la-

terali formate di lastre di cristallo a superficie piane e parallele si possano far girare intorno ad una cerniera verticale, chiudersi ed aprirsi per angoli che vengono esattamente misurati in un arco graduato. L'uno e l'altro di questi mezzi fu già immaginato e minutamente descritto dal padre Boschovich nelle più volte citate sue opere. Noi tralascieremo di far parola del secondo, imperocchè il potere rifrattivo e dispersivo delle sostanze fluide è sottoposto a notabili variazioni dipendenti dalla temperatura, e solo qualche cosa diremo sul prisma variabile di vetro dal Boschovich appellato *vitrometro*, il cui uso e costruzione è, come vedrassi, ben semplice, rimandando per una più minuta descrizione alle sue opere vol. I., ed ai *Dialoghi ottici teorico-pratici* di Lorenzo Selva ottico veneto pubblicati in Venezia nel 1787, operetta pregevole per la sua semplicità, e la cui lettura deve molto raccomandarsi agli artefici e giovani studiosi, poichè vi s'incontrano molti dettagli storici e pratici, che ben corrispondono alla fama dall'autore acquistatasi in quei tempi colle macchine ottiche di ogni genere che da esso costruivansi nella sua officina, e costruisconsi tutt'ora da suo figlio Giuseppe, erede della sua fama ed abilità.

Il vitrometro del padre Boschovich costruiscesi al seguente modo. ABC , $abcd$ (fig. 13) rappresentano le basi di due pezzi prismatici di una stessa specie di vetro, tali che l'arco ABC sia circolare, ed AC la sua corda; ab , bc , cd sieno linee rette e basi di altrettante faccie rettangolari piane; ad un arco di cerchio dello stesso raggio di ABC , sicchè l'arco ad possa esattamente applicarsi alla periferia ABC in modo da non lasciare interstizio vacuo. Ciascheduno potrà immaginarsi formati i due piccoli prismi di cristallo, fingendo trasportate parallelamente al piano della tavola queste due basi fino all'altezza di mezzo pollice circa lungo una direttrice perpendicolare al piano medesimo. I raggi dei cerchi, ai quali appartengono gli archi ABC , ad sono arbitrari; Boschovich trova conveniente per essi le dimensioni di 6 ad 8 pollici, e l'estensione di 25° a 30° per il maggior arco ABC . Arruotati e preparati questi due pezzi di vetro della medesima specie nelle dimensioni ora indicate, è palese che adattando l'arco concavo ad sul convesso ABC in modo che

bc riesca parallela ad AC , come nella *fig. 14*, è palese che un raggio di luce bianca il quale sotto qualunque inclinazione cada sulla faccia bc , sortirà per l'opposta faccia AC in una direzione parallela alla primitiva senza essere decomposto in colori; che anzi per la piccolezza delle dimensioni dello stromento si potrà riguardare la direzione del raggio luminoso quando sorte da AC , come il prolungamento del raggio incidente.

Se ora facciasi scorrere il pezzo minore $abcd$ verso uno degli estremi, per es. verso A , e si fermi in una posizione qualunque come nella *fig. 15*, è chiaro che bc trovasi inclinato ad AC di un angolo Q misurato dal numero dei gradi trascorsi dal punto d (o da qualunque altro punto determinato del pezzo minore) lungo l'arco ABC nel procedere verso A . Nel tempo stesso appare che un raggio di luce ricevuto nella faccia piana bc sortirà per AC soffrendo quelle stesse refrazioni e decomposizioni che sarebbero prodotte da un prisma intero della stessa materia di un angolo refringente $= Q$.

27. L'uso di questo stromento richiede che conoscam con ogni precisione l'angolo refringente Q , e l'indice di rifrazione e dispersione della specie di vetro di cui è formato.

Per determinare l'angolo Q conviene avere un circolo od un settore di circolo esattamente diviso con un raggio girevole intorno al centro, che supporremo essere quell'alidada alla quale viene d'ordinario applicato il nonio della divisione, e fingeremo appoggiato questo circolo sopra un piede in modo da poterlo rendere orizzontale. Sul piano del circolo si fissi sopra un pezzo di ottone a bella posta costruito il maggiore prisma ABC in modo che il centro dell'arco ABC coincida col centro della macchina; e sull'alidada mobile si fisi il minore pezzo $abcd$ in modo che scorra esattamente lungo il maggiore quando questa si fa girare intorno al centro. Condotta avendo l'alidada in quella posizione in cui bc è parallela ad AC , si osservi a qual divisione corrisponde lo zero del nonio; se si conduce l'alidada mobile, e con essa il minore pezzo $abcd$ in un'altra posizione, e si noti la divisione a cui corrisponde, la differenza fra le due divisioni, ossia l'angolo trascorso sarà la misura dell'angolo Q .

Per riconoscere quando bc sia parallela ad AC (fig. 14), dopo di avercela posta presso a poco con un compasso, si proceda nel modo seguente. Per la tenuissima apertura della finestra della camera oscura col mezzo dell'eliostata s'introduca un raggio di luce solare in una direzione orizzontale, e si noti nell'opposta parete fra due sottili linee verticali il circoletto rappresentante l'immagine solare; indi si riceva nella superficie bc il fascio luminoso, situato avendo il vitrometro vicino all'apertura. Se questo fascetto non sia sciolto in colori, e si diriga alla stessa posizione senza aver ricevuto alcuna amplificazione, sarà bc parallela ad AC ; in caso diverso si farà scorrere lentamente ad sopra ABC , finchè queste condizioni adempiute faranno conoscere la posizione del parallelismo.

Per determinare in fine l'indice di rifrazione e di dispersione relativo al vetro del prisma variabile, si seguiranno i metodi esposti nei numeri precedenti, dando all'angolo refringente Q la maggiore possibile apertura, ovvero lavorando della stessa materia un prisma, il cui angolo refringente sia all'incirca di 60° .

Usi del vitrometro.

28. Gli usi del vitrometro sono a lungo e con tutta chiarezza descritti dal padre Boschovich nell'opuscolo I. del tomo I. delle sue opere; noi li ridurremo brevemente ai due seguenti più importanti per la costruzione dei cannocchiali acromatici.

1.^o *Determinare mediante il vitrometro l'indice di rifrazione per una qualunque specie di vetro.*

Del proposto vetro costriscasi un piccolo prisma di un angolo refringente di 12 a 15 gradi, avente le facce piane laterali presso a poco uguali alla faccia eretta sopra bc , e si applichi questo prisma sull'alidada mobile, fermandovelo con mastice o cera in modo che una delle sue facce combaci con la faccia bc , e venga così condotto unito al pezzo $abcd$ lungo l'arco ABC .

Ciò premesso s'introduca col mezzo dell'eliostata un sottilissimo raggio di luce solare nella camera oscura in direzione orizzontale, e si segni nell'opposta parete, o so-

pra una carta verticale il luogo dell'immagine diretta del sole, racchiudendola esattamente fra due piccole linee. Si riceva in seguito nel prisma aggiunto al vitrometro, cosicchè sia obbligato ad attraversare tutto il sistema e del prisma e del vitrometro; è palese che se l'alidada abbia rapporto all'arco ABC quella posizione nella quale bc risulta esattamente parallelo ad AC , si otterrà da tutto il sistema lo stesso spettro che si otterrebbe dal prisma aggiunto isolatamente, e situato allo stesso luogo; muovendo in seguito l'alidada in modo che il vitrometro venga a formare un prisma di angolo refringente posto inversamente all'angolo del prisma aggiunto, la rifrazione attraverso alla sostanza del vitrometro sarà contraria a quella originata dal primo prisma, lo spettro diminuirà, e si andrà ravvicinando alla sua posizione naturale. Muovasi l'alidada lentamente finchè lo spettro solare sia ridotto ad un circoletto di luce bianca e ritornato alla sua posizione naturale segnata nella parete, ed ivi si fissi, per rilevare l'angolo del prisma variabile che toglie la rifrazione.

Se indichiamo per ψ l'angolo refringente del prisma aggiunto, per m' l'indice di rifrazione ad esso spettante; per ψ l'angolo del prisma variabile ottenuto dall'osservazione, per m l'indice di rifrazione corrispondente al vetro di cui è composto il prisma variabile, quantità determinata per le cose precedenti, sarà giusta il § 25

$$m' - 1 = (m - 1) \frac{\psi}{\psi}.$$

29. *Scolio I.* Se il prisma sovrapposto al vitrometro sia della stessa sostanza, o almeno dotato di una medesima forza dispersiva del vitrometro stesso, allora ritornato lo spettro solare alla sua posizione naturale segnata nella parete, l'immagine sarà racchiusa dentro le linee già prima condottevi, e tornerà bianca nei contorni. Ma se il potere dispersivo delle due sostanze non sia lo stesso, l'immagine solare bianca nel mezzo, sarà nei contorni tinta dei colori estremi dello spettro, nè più potrà essere contenuta fra le due linee. In questo caso si farà muovere l'alidada finchè vedasi che i due estremi dell'immagine sono equidistanti dalle indicate linee; l'angolo del prisma variabile corrispondente a questa circostanza sarà il valore

di ψ . Nell'uno e nell'altro caso i precetti del § precedente daranno l'indice di rifrazione per i raggi medj dello spettro solare.

30. *Scolio II.* I precetti esposti nei §§ precedenti per determinare l'indice di rifrazione, essendo indipendenti dall'angolo d'incidenza dei raggi sulla prima superficie del vetro, nulla lasciano a desiderare per parte della semplicità; ma sono al tempo stesso sottoposti alla condizione di angoli refringenti molto piccoli, e qualora si aspiri a tutta l'esattezza gli angoli di 12° a 15° non possono riguardarsi come tali. A queste formule prossime, altre rigorose ne costituisce il più volte lodato padre Boschovich di facilissima applicazione, che ora ci faremo ad esporre. Suppone egli che il raggio luminoso proveniente dall'apertura dell'eliostata sia ricevuto ad angolo retto sulla prima superficie del prisma, dietro la quale ipotesi facilmente si ottengono le formule relative al suo viaggio per tutto il sistema; si giudica poi che tale condizione sia adempita quando i raggi di luce riflessi dalla prima superficie ritornano sull'apertura dell'eliostata.

Siano pertanto (fig. 16) BAC , ACL le sezioni di due prismi di diversa sostanza, e DEG un raggio di luce che cadendo ad angolo retto sulla prima superficie AB passa senza alcuna alterazione fino in F dove abbandona la primitiva direzione, piegando verso FOK , allontanandosi dalla TFH perpendicolare alla superficie AC di separazione dei due prismi. Giunto poi in O di nuovo, si allontana (rientrando nell'aria) dalla perpendicolare POH condotta sulla superficie COL del secondo prisma, piegando per OQR . L'angolo in Q formato dalla nuova direzione con la primitiva direzione del raggio luminoso è la rifrazione totale sofferta attraversando i due prismi, che porremo $= r$. Pongasi l'angolo refringente del primo prisma $= \psi$, del secondo $= \psi$, l'indice di rifrazione relativo al passaggio dell'aria nel vetro per il primo prisma sia $= m$, per il secondo $= m$.

A motivo dell'angolo TFA retto, sarà $TFE = BAC = \psi$; l'angolo rifratto HFO pongasi $= x$; la somma dei due angoli HFO , HOF essendo $= ACL = \psi$, sarà l'angolo d'incidenza nell'ultima superficie $= \psi - x$; l'angolo rifratto POQ è

$= OSQ + OQS$; l'angolo OSQ supplemento dell'angolo OSE sarà $= ABC = \psi - \psi'$; quindi chiamando γ l'angolo POQ sarà $\gamma = \psi - \psi' + r$. Premesse queste denominazioni avremo (§ 21) $\text{sen } \psi' : \text{sen } x :: m : m'$, però . . . $\text{sen } x = \frac{m'}{m} \text{sen } \psi' . . . (1)$

$\text{sen } (\psi - x) : \text{sen } \gamma :: 1 : m$, donde $\text{sen } \gamma = m \text{sen } (\psi - x)$, ovvero sostituendo per γ il suo valore

$$\text{sen } (\psi - \psi' + r) = m \text{sen } (\psi - x) . . . (2)$$

Queste due equazioni determinano la posizione del raggio rifratto rapporto alla primitiva sua direzione.

Per vedere come mediante l'uso del prisma variabile se ne ottenga l'indice di rifrazione del primo prisma, supporremo che sia il raggio rifratto stato ricondotto alla sua posizione naturale mediante il moto lentissimo dell'alidada, come fu prescritto ai §§ 28-29; sarà in questo caso $r = 0$; si riterranno le quantità ψ , m relative al prisma variabile; sarà ψ dato dalle divisioni del vitrometro; m un costante in tutte le osservazioni; ψ' sarà l'angolo refringente del prisma che si addossa al pezzo $abcd$ (fig. 15); m' l'indice cercato di rifrazione. Ciò posto, l'equazione (2) darà x mediante il calcolo della formula

$$\text{sen } (\psi - x) = \frac{\text{sen } (\psi - \psi')}{m}, \text{ e l'equazione (1) darà}$$

$$m' = \frac{m \text{sen } x}{\text{sen } \psi'}.$$

31. 2.° *Determinare il rapporto di dispersione fra due specie di vetri.*

Da quanto abbiamo detto nel § 23 facilmente si scorre l'uso del vitrometro per determinare il rapporto di dispersione dei diversi vetri. Si costruisca del vetro proposto un piccolo prisma da applicarsi sopra il pezzo $abcd$ (fig. 15) del vitrometro; indi dopo di avercelo esattamente applicato, si cerchi l'angolo del prisma variabile, che distrugge i colori rendendo l'immagine bianca il più che sia possibile. Chiamando ψ l'angolo del prisma variabile dato dall'osservazione; m' , m essendo come nei §§ precedenti gl'indici di refrazione corrispondenti ai raggi medj pella sostanza del prisma proposto e del vitrometro; $d m'$, $d m$ le dispersioni per le stesse sostanze relative ai

colori estremi, ritenendo, come sopra, ψ l'angolo refringente del prisma aggiunto, avremo, considerando gli angoli ψ , ψ' piccolissimi per il § 23, $\frac{d m'}{d m} = \frac{\psi}{\psi'}$.

Se per un altro vetro chiamiamo $d m''$, ψ'' le quantità per il precedente indicate con ψ , $d m'$, troveremo del pari $\frac{d m''}{d m} = \frac{\psi}{\psi''}$. Quindi risulterà $\frac{d m'}{d m''} = \frac{\psi'}{\psi''}$.

32. Se gli angoli ψ , ψ' non fossero molto piccoli le precedenti equazioni non darebbero con tutta esattezza il valore di $\frac{d m'}{d m}$; quindi anche per questo caso sarà lodevole cosa far cadere sulla prima superficie del prisma il raggio solare proveniente dall'eliostata ad angolo retto, e ricercare del pari l'angolo del prisma variabile in cui sono distrutti i colori nel migliore modo possibile. Le equazioni (1), (2) del § 30 ci daranno dietro una semplice differenziazione il rapporto $\frac{d m'}{d m}$. In fatti essendo

$y = \psi - \psi' + r$, sarà $d y = d r$; e se i raggi dei diversi colori devono sortire sovrapposti gli uni agli altri, dovremo avere per tutta l'estensione dello spettro $d y = 0$. Differenziando le due indicate equazioni in questa ipotesi, e chiamando $d m$, $d m'$ le differenze degl'indici medj di refrazione dagl'indici estremi, avremo dalla prima

$$m d x \cos x = \sin \psi' (d m' - \frac{m'}{m} d m),$$

e dalla seconda $m d x = d m \tan (\psi - x)$.

Da queste due equazioni eliminando $m d x$, e sostituendo per $\sin \psi'$ il suo valore $\frac{m}{m'} \sin x$, si ottiene l'equazione

$$\frac{d m'}{d m} = \frac{m'}{m} \{ 1 + \tan (\psi - x) \cot x \},$$

nella quale ψ è l'angolo refringente del vitrometro che distrugge la dispersione; x un angolo ausiliario calcolato mediante l'equazione $\sin x = \frac{m'}{m} \sin \psi'$.

33. *Scolio.* I metodi precedenti danno il rapporto di dispersione e di rifrazione con un'esattezza sufficiente per

i più comuni bisogni degli ottici nella costruzione dei cannocchiali acromatici, tanto più che un perfetto acromatismo non può ottenersi per le ragioni addotte al § 23. Non si deve però dissimulare che sono insufficienti a dare con qualche precisione il rapporto di dispersione per i singoli colori dello spettro solare, i quali soltanto con buoni strumenti, e col metodo del signor Fraunhofer di sopra riferito possono essere bene determinati. I signori Biot e Cauchy hanno immaginato un altro semplice apparato (Biot, *Traité de Physique Vol. III. pag. 477 e seg. Paris 1816*) che si applica ad un circolo moltiplicatore, e col quale agevolmente si determina l'indice medio di dispersione, che si deve adoperare nella costruzione degli obbiettivi acromatici; ma la descrizione e l'uso di questo apparato ci guiderebbe troppo fuori della strada che ci siamo proposta, non potendo porsi in pratica dalla maggior parte degli artefici, i quali per lo più non sono troppo esercitati al maneggio di macchine complicate, come sono i circoli moltiplicatori. Rimandando perciò i nostri lettori all'opera citata, porremo fine a queste preliminari teorie coi due seguenti problemi, dai quali avremmo potuto direttamente ricavare i precetti dei §§ precedenti, se non avessimo creduto convenire al maggior numero la via semplice e particolare già segnata da Boschovich, e da noi adottata.

34. PROBLEMA I. *Determinare la via di una molecola luminosa SA (fig. 17) per un qualunque numero di prismi riuniti intorno ad un vertice comune B.*

Sieno GBM , MBN , NBP . . . quanti si vogliano prismi uniti intorno al vertice comune B ; si rappresentino per ordine da $\downarrow$, $\downarrow'$, $\downarrow''$. . . i loro angoli refringenti, e supponiamo che gl'indici medj di rifrazione nel passaggio dall'aria nel vetro sieno rispettivamente indicati da m , m' , m'' . . .; segua il raggio luminoso attraversando gl'indicati prismi la linea spezzata $S \phi \phi'' \phi''' \phi'''' O$. Per fissare le idee ridurremo i prismi al numero di tre, come la figura indica, essendo evidente che potrassi seguire lo stesso metodo per un maggior numero. Si esprimano da ϕ , ϕ' , ϕ'' , ϕ''' ec. gli angoli che il raggio luminoso fa con le successive superficie dei diversi prismi, alternativamente computati dalla base e dal vertice, come la figura indica.

Le proprietà dei triangoli daranno tosto

$$\phi'' = \phi' + \psi; \quad \phi' = \phi''' + \psi'; \quad \phi'' = \phi'' + \psi''.$$

Se ora indichiamo con i l'angolo d'incidenza nella prima superficie SA , con r l'angolo rifratto; e del pari con $i', r'; i'', r''; i''', r'''$ le analoghe quantità nelle seguenti superficie BM, BN, BP , avremo evidentemente le seguenti relazioni

$$\begin{array}{ll} i = 90^\circ - \phi & r = 90^\circ - \phi' \\ i' = 90^\circ - \phi'' & r' = 90^\circ - \phi'' \\ i'' = 90^\circ - \phi''' & r'' = 90^\circ - \phi''' \\ i''' = 90^\circ - \phi'' & r''' = 90^\circ - \phi'' \end{array}$$

i quali valori introdotti nelle equazioni precedenti daranno le seguenti

$$i = r - \psi; \quad i' = r' - \psi'; \quad i'' = r'' - \psi'' \dots (1)$$

La legge generale di ottica darà intorno al punto A , ove il raggio luminoso passa dall'aria nel vetro la proporzione $\text{sen } i : \text{sen } r :: m : 1$; ed intorno al punto ϕ'' nel passaggio dal primo prisma nel secondo darà per il § 21

$\text{sen } i' : \text{sen } r' :: m' : m$; e per la stessa ragione intorno al punto ϕ''' avremo $\text{sen } i'' : \text{sen } r'' :: m'' : m'$. Per ultimo intorno al punto ϕ'' , ove supponiamo che il raggio luminoso rientri nell'aria, avremo $\text{sen } i''' : \text{sen } r''' :: 1 : m''$; dalle quali proporzioni si ottengono le seguenti equazioni

$$\left. \begin{array}{l} \text{sen } r = \frac{1}{m} \text{sen } i \\ \text{sen } r' = \frac{m}{m'} \text{sen } i' \\ \text{sen } r'' = \frac{m'}{m''} \text{sen } i'' \\ \text{sen } r''' = m'' \text{sen } i''' \end{array} \right\} (2)$$

Riguardando pertanto gl'indici di rifrazione come conosciuti, e come dato l'angolo della prima incidenza i , il calcolo successivo delle equazioni (2), (1) farà conoscere gli angoli $r, i', r', i'', r'', i''',$ ed r''' .

Più non resta che trovare l'angolo fatto dalla nuova direzione $\phi'''O$ del raggio luminoso con la primitiva SA . A tale oggetto guidisi per O una parallela ad SA , che si prolunghi fino ad incontrare il lato BA in G , e si prolunghi del pari $O\phi'''$ fino in K . Ponendo l'angolo in $O = \Delta$, sarà Δ la cercata inclinazione della nuova alla

primitiva direzione; ed in grazia delle parallele SA , OG sarà l'angolo $G = \phi$. Le proprietà dei triangoli KOG , $KB\phi''$ daranno $\Delta = 180^\circ - \phi - K$; $K = 180^\circ - \phi'' + (\psi + \psi' + \psi'')$; sostituendo nella prima questo valore di K , si avrà $\Delta = \phi'' - \phi - (\psi + \psi' + \psi'')$, ovvero (a motivo di $\phi = 90^\circ - i$; $\phi'' = 90^\circ - r''$)

$$\Delta = i - r'' - (\psi + \psi' + \psi'') \dots (3)$$

Corollario. Siano gli angoli refringenti dei prismi molto piccoli, e tale sia anche l'angolo i d'incidenza, in modo che si possano prendere per i loro seni. Le equazioni (2) ed (1) daranno

$$r = \frac{i}{m}; \quad i' = \frac{i - m\psi}{m}; \quad r' = \frac{i - m\psi}{m'}; \quad i'' = \frac{i - m\psi - m'\psi'}{m''};$$

$$r'' = \frac{i - m\psi - m'\psi'}{m''}; \quad i''' = \frac{i - m\psi - m'\psi' - m''\psi''}{m''};$$

$$r''' = i - m\psi - m'\psi' - m''\psi''.$$

Sostituito nell'equazione (3) il valore di r''' , diviene indipendente dall'angolo i , e riducesi alla seguente

$$\Delta = (m - 1)\psi + (m' - 1)\psi' + (m'' - 1)\psi'' \dots (4)$$

Se il raggio emergente deve essere parallelo al raggio incidente SA , dovrà essere $\Delta = 0$; ora in tutte le specie conosciute di vetro l'indice di rifrazione è > 1 ; quindi perchè il secondo membro dell'equazione (4) possa ridursi a 0, è forza che qualcuno degli angoli refringenti ψ, ψ', ψ'' divenga negativo, circostanza che annunzia doversi situare i corrispondenti prismi con l'angolo refringente rivolto verso la base, come abbiamo nei §§ precedenti assunto nel dare i precetti per determinare m, m' .

35. **PROBLEMA II.** *Supposto che un raggio di luce bianca SA attraversando come nel problema precedente un sistema di prismi riuniti intorno al vertice comune B si decomponga nei suoi colori primitivi, si cerca l'angolo che i raggi estremi dello spettro faranno coi raggi medj ripassando nell'aria.*

Si ritengano tutte le denominazioni del problema precedente, e si supponga che siano relative al raggio di media refrangibilità dello spettro solare; supponiamo inoltre che per un altro colore gl'indici di rifrazione nelle diverse

specie di vetri dei quali sono costruiti i prismi, siano rispettivamente indicati da $m + dm$, $m' + dm'$, $m'' + dm''$, $m''' + dm'''$, dovendosi riguardare dm , dm' come positivi verso l'estremo violetto, e negativi verso l'estremo rosso. Essendo in tutta l'estensione dello spettro dm , dm' quantità molto piccole, potremo riguardarle come differenziali dalle quantità m , m' ed in tal caso gli angoli r , r' , r'' i' , i'' , i''' per la loro variazione riceveranno dei piccolissimi incrementi, che si dovranno pure riguardare come i loro differenziali, i rapporti dei quali si scuopriranno dal differenziare le equazioni (1), (2) del problema precedente.

Ciò posto, a motivo di i , ψ , ψ' , ψ'' costanti, le equazioni (1) daranno tosto $di = dr$; $di' = dr'$; $di'' = dr''$. In seguito la prima delle equazioni (2) darà $dm \sin r + m dr \cos r = 0$, donde si deduce

$$dr = - \frac{dm \sin r}{m \cos r} = di'.$$

La seconda equazione $m \sin i' = m' \sin r'$ differenziata darà $dr' = \frac{dm \sin i'}{m' \cos r'} + \frac{m di' \cos i'}{m' \cos r'} - \frac{dm' \sin r'}{m' \cos r'}$;

Sostituendo per di' il suo valore, si otterrà

$$\begin{aligned} dr' &= \frac{dm \sin i'}{m' \cos r'} - \frac{dm \sin r \cos i'}{m' \cos r \cos r'} - \frac{dm' \sin r'}{m' \cos r'} \\ &= \frac{dm \sin (i' - r)}{m' \cos r \cos r'} - \frac{dm' \sin r'}{m' \cos r'}; \end{aligned}$$

ed osservando che $i' - r = -\psi$, si avrà più semplicemente $dr' = - \frac{dm \sin \psi}{m' \cos r' \cos r} - \frac{dm' \sin r'}{m' \cos r'}$.

Con simili riduzioni, differenziando la terza e quarta delle stesse equazioni (2), si troverà

$$\begin{aligned} dr'' &= - \frac{dm \sin \psi \cos i''}{m'' \cos r \cos r' \cos r''} - \frac{dm' \sin \psi'}{m'' \cos r' \cos r''} - \frac{dm'' \sin r''}{m'' \cos r''}; \\ dr''' &= - \frac{dm \sin \psi \cos i'' \cos i'''}{\cos r \cos r' \cos r'' \cos r'''} - \frac{dm' \sin \psi' \cos i'''}{\cos r' \cos r'' \cos r'''} \\ &\quad - \frac{dm'' \sin \psi''}{\cos r'' \cos r'''}; \end{aligned}$$

le quali formule (che si potrebbero facilmente estendere ad un maggior numero di prismi) risolvono il problema proposto.

Coroll. Sia il sistema composto di due soli prismi in modo disposti che i raggi medj ed estremi sortano paralleli, e ricompongano la luce bianca; sarà $m'' = 1$, $d m'' = 0$, $d r'' = 0$, e perciò fra $d m$, $d m'$ dovrà esistere la relazione

$$d m \operatorname{sen} \psi \cos i'' + d m' \cos r \operatorname{sen} \psi' = 0.$$

Pongasi, come sopra abbiamo prescritto per l'uso del vitrometro di Boschovich, $i = 0$; sarà $r = 0$, $i' = -\psi$, $i'' = r' - \psi$, essendo r' dato dall'equazione

$\operatorname{sen} r' = -\frac{m}{m'} \operatorname{sen} \psi$. Dietro ciò la precedente equazione

$$-\frac{d m}{d m'} + \frac{m}{m'} \frac{\operatorname{sen} \psi'}{\operatorname{sen} r' \cos (\psi' - r')} = 0,$$

ovvero scrivendo nel numeratore $\operatorname{sen} (\psi' - r' + r')$ in luogo di $\operatorname{sen} \psi'$, e facendo le opportune riduzioni

$$\frac{d m}{d m'} = \frac{m}{m'} \{1 + \operatorname{tang} (\psi' - r') \cot r'\},$$

la quale coincide con l'equazione del § 32 qualora si adattino le denominazioni ivi assunte al caso presente.

In generale l'equazione superiore darà con molta semplicità il rapporto di dispersione di due vetri, qualora si abbiano due prismi che ricompongano la luce bianca, e siasi misurato l'angolo i d'incidenza nella prima superficie; imperciocchè conosciuti i , ψ , ψ' si calcoleranno per i raggi medj i valori di i'' e di r , dopo di che si avrà subito il rapporto $\frac{d m'}{d m}$.

Scolio. Nelle due precedenti proposizioni abbiamo supposto i prismi addossati l'uno all'altro in modo che non rimanesse fra l'uno e l'altro strato alcuno di aria; ma la soluzione si adatta del pari anche a questo caso, supponendo $= 1$ l'indice relativo di rifrangibilità. Così se il secondo prisma di angolo refringente ψ' dovrà essere di aria; dovrà nelle cose precedenti porsi $m' = 1$, $d m' = 0$, con le quali modificazioni si otterranno agevolmente le formule relative a questo caso.

CAPITOLO II.

Proprietà di una sola lente; Metodi per determinare la distanza focale di una lente; Teoria delle lenti istorie.

36. *Definizioni.* I. Un pezzetto di vetro puro, scevro da bolle e filamenti, arruotato dalle sue due parti in modo che le opposte superficie sieno di figura sferica; viene chiamato *lente*. Supporremo per la simmetria della figura che i centri delle superficie sferiche sieno in una linea perpendicolare al piano condotto pel mezzo della lente, e che costituisca la base comune dei due segmenti, dai quali si può essa concepire formata.

La linea condotta per i centri ora nominati delle due superficie sferiche dicesi *asse della lente*.

La fig. 19 rappresenta una sezione fatta da un piano condotto per l'asse della lente, la quale verrà così prodotta dalla rotazione della figura intorno all'asse CC' . C è il centro della parte inferiore APB ; C' della parte superiore $AP'B$; PP' rappresenta la grossezza della lente.

II. La lente dicesi *convesso-convessa* se le due superficie APB , $AP'B$ saranno ambedue convesse; e se i raggi delle due superficie saranno uguali, la lente prende il nome di *isoscele*.

Piano-convessa se una delle due superficie sia piana e l'altra convessa (fig. 20).

Concavo-convessa se una superficie sia concava e l'altra piana (fig. 20 a).

Piano-concava se una superficie sia piana e l'altra concava (fig. 20 b).

Concavo-concava od anche *menisco* se sia concava da ambe le parti.

37. Noi supporremo da bel principio che l'indice di rifrazione sia lo stesso per tutti i raggi, per il quale assumeremo il suo medio valore, che nel vetro è prossima-

mente $= \frac{3}{2}$, o più esattamente $= \frac{31}{20}$. Supporremo inoltre che gli archi APB , $AP'B$, dai quali si determina la larghezza della lente, siano sempre di pochi gradi, affinché gli angoli d'incidenza risultino essi pure molto piccoli, e tali che nella proporzione fondamentale di diottrica, per la quale i seni degli angoli d'incidenza sono costantemente proporzionali ai seni degli angoli rifratti, si possano senza errore sensibile sostituire gli angoli ai loro seni. Per vedere chiaramente fino a qual limite si possa estendere questa supposizione, rappresentiamo con i ed r gli angoli d'incidenza, e rifratto. Sarà nella vera legge di diottrica $\text{sen } r = \frac{2}{3} \text{sen } i$, e nella assunta approssimazione $r = \frac{2}{3} i$.

Ponendo ora successivamente

	nella vera ipotesi	nella ipotesi prossima
$i = 3^\circ$ trovasi	$r = 1^\circ 59' 58''$	$2^\circ 0' 0''$
6 . . .	$= 3^\circ 59' 45''$	4 0 0
9 . . .	$= 5^\circ 59' 10''$	6 0 0
12 . . .	$= 7^\circ 58' 2''$	8 0 0
15 . . .	$= 9^\circ 56' 10''$	10 0 0

Da questa tabella apparisce che quando l'angolo d'incidenza non supera 6° , la differenza fra la ipotesi prossima e la vera legge della natura nell'angolo rifratto non eccede un quarto di minuto, quantità esigua e trascurabile. Tale differenza non eccede $1'$ che quando l'angolo d'incidenza supera 10° , quindi fino a questo limite si possono ritenere gli angoli d'incidenza e di rifrazione in un rapporto costante; sopra tutto per quelli usi che non richiedono l'ultima esattezza.

Sia ora un raggio di luce FM (fig. 19) ricevuto nella prima superficie APB in una direzione parallela all'asse CC' . Se al punto d'ingresso M dal centro C' conducasi il raggio $C'M$, sarà questo perpendicolare alla superficie

ABP nel punto M ; perciò FMQ sarà l'angolo d'incidenza, il quale per la condizione delle parallele FM , CC' è uguale all'angolo PCM , ovvero al numero dei gradi contenuti in PM . Appareisce di qui che se l'angolo d'incidenza non deve superare 10° , dovrà l'arco APB limitarsi a 20° , con che la figura della lente sarà completamente determinata. Supponiamo, per esempio, che la lente sia isoscele, cioè i due raggi CP , CP' sieno uguali, e rappresentiamoli per r . Sarà $AB = 2r \sin 10^\circ$; $PP' = 2r \sin \nu 10^\circ$, cioè in numeri $AB = 0,3473 r$, $PP' = 0,0304 r$. Così se fosse $r = 1$ piede, si troverebbe $AB = 4^p 2^l, 1$ circa; $PP' = 4^l, 38$ circa. Da tutto ciò si rileva che l'apertura di una lente è all'incirca un terzo del raggio delle superficie sferiche che la conterminano, mentre la sua grossezza è sempre una quantità molto piccola in confronto degli stessi raggi.

Premesse queste cose venghiamo alla soluzione dei seguenti problemi.

38. PROBLEMA I. *Da un punto luminoso E situato nell'asse EAO di una lente convesso-convessa PP parta un raggio di luce EM; domandasi 1.° la posizione del punto O dell'asse verso cui è rivolto per la rifrazione nella prima superficie PAP, e l'angolo O sotto cui la nuova direzione taglierebbe l'asse; 2.° la posizione del punto F, a cui si rivolge ripassando dalla seconda superficie PBP nell'aria, e l'angolo F sotto di cui taglierà l'asse (fig. 21).*

Sia C il centro della superficie anteriore PAP , D il centro della superficie posteriore; il raggio luminoso EM entrando dall'aria nel vetro piegasi verso la perpendicolare CMc prendendo la nuova direzione MNO , e giunto in N sul punto di ripassare nell'aria si allontana dalla perpendicolare DNd prendendo la direzione NF . Pongasi $EA = a$; $CA = r$; $DB = r'$; $OA = y$; $FB = u$, l'angolo $AEM = \phi$, gli angoli in O , F , C s'indichino colle lettere O , F , C . Tutti questi angoli per la piccola apertura che supponiamo data alla lente dovranno riguardarsi come uguali ai loro seni ed alle loro tangenti. Sia inoltre l'indice di rifrazione $= m$. Condotta il raggio CM prolungato in c , saranno Emc , CMO gli angoli d'incidenza e rifratto nella prima superficie, e si avrà nell'as-

sunta ipotesi $EMC : CMO :: m : 1$; quindi

$$CMO = \frac{EMC}{m} = \frac{\phi + C}{m}. \text{ Ora si ha } C = \frac{MA}{r} = \frac{a\phi}{r}$$

(per la piccolezza di AM e di ϕ). Perciò

$$CMO = \frac{a+r}{m r} \phi; \text{ d'altra parte nel triangolo } CMO \text{ si}$$

$$\text{ha } O = C - CMO = \frac{a\phi}{r} - \frac{a+r}{m r} \phi = \frac{(m-1)a-r}{m r} \phi.$$

$$\text{Pertanto sarà } AO = \gamma = \frac{AM}{O} = \frac{m a r}{(m-1)a-r}, \text{ la qua-}$$

le darà la posizione del punto O . L'equazione ora trovata si potrà scrivere eziandio sotto il seguente aspetto più semplice, di cui faremo in seguito un uso frequente

$$\frac{m-1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{m}{\gamma} \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

Essendo questo valore di γ indipendente da ϕ , ossia dall'angolo AEM , ci dimostra che tutti i raggi, i quali partendo dal punto E cadono sulla superficie anteriore PAP verrebbero in modo rifratti da riunirsi nello stesso punto O , se non subissero una nuova rifrazione ripassando nell'aria, e supponendo sempre l'estensione della lente tale che l'angolo d'incidenza non superi i cinque o sei gradi.

La formula trovata per γ è generale, e si applica eziandio ad altri casi. Se la superficie PAP della lente dovesse essere concava si farebbe r negativo; se il punto radiante fosse fissato nella parte inferiore, sicchè i raggi di luce nel cadere sulla superficie PAP in luogo di divergere dal punto E , convergessero verso un punto dell'asse preso dalla parte PBP si dovrebbe porre a negativo; e finalmente se il raggio luminoso in luogo di passare dall'aria nel vetro, passare dovesse dal vetro nell'aria, converrebbe scrivere $\frac{1}{m}$ in luogo di m . Ora per il pas-

saggio che fa il raggio luminoso nell'aria rifrangendosi per la seconda superficie PBP hanno precisamente luogo tutte queste circostanze, mentre si dirige ad un punto O , si rifrange per una superficie concava di raggio r' , passa dal vetro nell'aria. Se pertanto porremo la grossezza della lente $= 2v$, e faremo $HO = k$ (H essendo nel mezzo

della lente), l'equazione (a) si applicherà a questo caso, ponendo in essa $-r'$, $-(k-v)$, $\frac{1}{m}$ in luogo di r , a , m .

Quindi se fingiamo dopo la rifrazione il raggio luminoso diretto al punto F , e ponghiamo $FB = a$, avremo con questi cambiamenti $-\frac{1-m}{m r'} = -\frac{1}{k-v} + \frac{1}{m a}$,

la quale può presentarsi sotto la forma

$$\frac{m-1}{r'} = \frac{1}{a} - \frac{m}{k-v} \quad . \quad . \quad (b)$$

Resta a trovare l'angolo in F , ovvero BFN . Per la piccola ampiezza delle lenti si può riguardare BN come una piccola linea perpendicolare a BF , l'angolo BFN come uguale alla sua tangente. Sarà così

$$BFN = \frac{BN}{BF} = \frac{(k-v)O}{a}; \text{ ora l'angolo } O \text{ è}$$

$$= \frac{AM}{AO} = \frac{a\phi}{k+v}. \text{ Sostituito questo valore, sarà}$$

$$BFN = \frac{k-v}{k+v} \frac{a}{a} \phi \quad . \quad . \quad (c)$$

Se ora riflettiamo che la quantità sopra indicata per γ è $= k+v$, le tre equazioni trovate saranno

$$\frac{m-1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{m}{k+v} \quad . \quad . \quad (a)$$

$$\frac{m-1}{r'} = \frac{1}{a} - \frac{m}{k-v} \quad . \quad . \quad (b)$$

$$\text{angolo } BFN = \frac{k-v}{k+v} \frac{a}{a} \phi \quad . \quad . \quad (c)$$

le quali contengono l'intera teoria delle lenti sferiche, ed anche delle lenti piano-convexe o piano-concave; potendosi riguardare una porzione di superficie piana, come appartenente ad una sfera di raggio infinito.

39. *Coroll. I.* La grossezza $2v$ della lente è quantità sì piccola in confronto delle quantità r , r' , a , a , k che si può il più delle volte trascurare, pure se qualche volta occorra tenerne conto, basterà aver riguardo alle prime potenze di v . Dietro ciò, osservando che $\gamma = k+v$, le due equazioni (a), (b) con un semplice sviluppo daranno

$$\frac{m-1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{m}{k} - \frac{m}{k'} \quad \dots \quad (1)$$

$$\frac{m-1}{r'} = \frac{1}{a} - \frac{m}{k} - \frac{m}{k'} \quad \dots \quad (2)$$

dalle quali si ottiene mediante la somma

$$\frac{m-1}{r} + \frac{m-1}{r'} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a} - \frac{2m}{k'} \nu,$$

dove nel secondo membro si può scrivere in luogo di $\frac{m}{k'}$ il suo valore preso dall'equazione (1) trascurando ν , che risulterà $= \frac{1}{m} \left(\frac{m-1}{r} - \frac{1}{a} \right)$.

Trascurando poi per intero la grossezza della lente si ha dalla somma delle equazioni (1), (2)

$$\frac{m-1}{r} + \frac{m-1}{r'} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a} \quad \dots \quad (A)$$

equazione fondamentale, alla quale si appoggia la teoria di tutte le macchine ottiche.

40. *Coroll. II.* Supponendo $a = \infty$, i raggi cadranno paralleli sulla prima superficie PAP della lente, e sortiranno riunendosi tutti dall'altra parte ad un punto, che appellasi *foco* della lente. La distanza di questo punto dalla superficie PBP chiamasi *distanza focale*, che indicheremo con p , e sarà il valore di a quando $a = \infty$. L'equazione (A) diverrà per questo caso.

$$\frac{1}{p} = \frac{m-1}{r} + \frac{m-1}{r'} \quad \dots \quad (B)$$

e fra le quantità a , α , p sussisterà la relazione

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} \quad \dots \quad (C)$$

dalla quale rendesi manifesto che le quantità a , α variano in modo che crescendo una, l'altra diminuisce.

41. *Coroll. III.* L'equazioni (A), (B) danno

$$\alpha = \frac{a r r'}{(m-1) a (r+r') - r r'}; \quad p = \frac{r r'}{(m-1) (r+r')},$$

le quali si applicano facilmente a tutte le specie di lenti convesso-convesse, piano-convesse, convesso-concave ec. modificando convenientemente i segni ed i valori dei raggi r , r' .

Per dare un esempio dell'applicazione di queste formule, ed insieme per vedere come variano le quantità a , α , p nei loro reciproci rapporti, pongasi $r = r' = 10$; $m = \frac{31}{20}$. Si troverà $p = 9,090909$. Ponendo poi $a = 10$, 20 ec., si otterranno i valori di α , come nella seguente tavoletta:

a	α
10	100,0000
20	16,6667
30	13,0435
40	11,7647
50	11,1111
60	10,7143
70	10,4478
80	10,2564
90	10,1124
100	10,0000
1000	9,1743
10000	9,0993
100000	9,0917

Apparisce da questa tavoletta, che quando $a \approx 100000$, il valore di α si avvicina molto al valore di p ; quindi una distanza uguale a circa 10000 la distanza focale della lente può aversi per infinita, e i raggi di luce provenienti da un punto situato in essa distanza sopra la superficie della lente si possono riguardare come paralleli.

L'equazione (C) porge $\alpha = \frac{ap}{a-p}$, la quale mostra essere $\alpha = \infty$, quando $a = p$. Posto pertanto un punto luminoso nel foco di una lente, i raggi di luce che da esso procedendo attraversano la lente, si riuniscono dall'altra parte ad una distanza infinita; cioè sortono paralleli.

42. *Coroll. IV.* Consideriamo il caso speciale di una lente concavo-concava (*fig. 22*), e se ne cerchi la distanza focale. Avremo in questo caso r, r' negativi. Quindi il valore di p diventerà negativo, cioè i raggi che paralleli all'asse cadono sulla superficie anteriore della lente

sortiranno dall'altra parte divergenti, e le loro direzioni prolungate si riunirebbero in un punto F , come dimostra la fig. 22. Non vi ha dunque nelle lenti concave vero punto di riunione dei raggi; il punto F da cui divergono conserva tuttavia il nome di *foco*; ma dicesi *foco immaginario*, e la distanza focale FQ riguardare si deve nei calcoli come negativa.

L'equazione $\alpha = \frac{ap}{a-p}$ dimostra che essendo a positivo, α è sempre negativo, e minore di a ; perciò i raggi divergenti da una lente concava ne sortono sempre più divergenti. Se a è negativo minore di p , α sarà positivo, cioè i raggi che vi cadono convergendo ad un punto situato entro la distanza focale sortono convergenti. Si vedrà anche facilmente che sortono paralleli quando convergono ad un punto situato alla giusta distanza focale, e sortono divergenti se il punto a cui convergono è al di là della distanza focale.

Scolio. Noi tralasciamo qui di esporre tutte le circostanze particolari che si presentano nelle diverse specie di lenti, poichè queste agevolmente si deducono dalle equazioni generali date di sopra, osservando soltanto le regole ordinarie dei segni, e rammentando che una qualunque linea positiva mantiene la posizione rapporto alla lente da noi assegnatale nella fig. 21, mentre una negativa prende la direzione contraria.

43. **PROBLEMA II.** *Essendo dati nell'asse di una lente (fig. 23) due punti E, U , pei quali i rispettivi punti di riunione siano F, V , si domanda la relazione fra EU, FV , e l'espressione dell'angolo BVN dato per AUM .*

Ritenute le denominazioni superiori, si ponga inoltre $EU = u$, $FV = u'$, e per il punto U rappresenti k ciò che nel precedente problema s'indicò con k per il punto E .

Le equazioni (a), (b) § 38 daranno per il punto E

$$\frac{m-1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{m}{k+v}; \quad \frac{m-1}{r'} = \frac{1}{a} - \frac{m}{k-v},$$

e per il punto U , osservando che a si cangia in $a+u$, ed α in $\alpha-u'$

$$\frac{m-1}{r} = \frac{1}{a+u} + \frac{m}{k'+v}; \quad \frac{m-1}{r'} = \frac{1}{a-u'} - \frac{m}{k'-v},$$

dalle quali si ottengono tosto le due seguenti

$$\frac{u}{a(a+u)} = \frac{m(k-k')}{(k'+v)(k+v)}; \quad \frac{u'}{a(a-u')} = \frac{m(k-k')}{(k-v)(k'-v)}.$$

Dividendo una per l'altra, il quoziente si potrà porre sotto la forma seguente

$$\frac{(k+v)u}{a(a+u)(k-v)} = \frac{(k'-v)u'}{a(a-u')(k'+v)},$$

la quale somministra il cercato rapporto.

L'angolo BVN si ha dall'espressione dell'angolo BFN del problema precedente ponendovi $a+u$ in luogo di a , $a-u'$ in luogo di a , k' in luogo di k . Si troverà così

$$BVN = \frac{a+u}{a-u'} \cdot \frac{k'-v}{k'+v} \phi, \text{ essendo } \phi = AUM.$$

Coroll. Sia u quantità piccolissima, di cui si possano trascurare le potenze superiori alla prima; sarà u' dello stesso ordine, e trascurando i prodotti vu , vu' come di second'ordine si avrà $\frac{u}{a} = \frac{u'}{a'}$, la quale coincide col dif-

ferenziale dell'equazione $\frac{1}{p} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a'}$, ponendo per da , da i loro valori u , $-u'$.

44. PROBLEMA III. Sia E una piccola linea perpendicolare all'asse della lente nel punto E ; ed ϵ un qualunque punto di essa; si domanda il punto Z , in cui si andranno a riunire tutti i raggi di luce che partendo da ϵ attraversano la lente PP (fig. 23).

Sia ϵM un raggio luminoso, il quale prolungato tagli l'asse nel punto U . Siano come sopra F , V i punti di riunione di ϵ , U , e ritenute le precedenti denominazioni, cioè $EH = a+v$, $HF = a-v$, $EU = u$, $VF = u'$, la semigroschezza della lente $= v$, l'angolo $HUM = \phi$, se dal punto F si conduce FZ perpendicolare all'asse, e si prolunga fino all'incontro di NV in Z , sarà Z punto di riunione dei raggi procedenti da ϵ . Ponendo in fatti $E\epsilon = z$, sarà $FZ = FV \text{ ang. } FVZ = u' \frac{(a+v)}{a-u'} \cdot \frac{k-v}{k'+v} \phi$,

sostituendo cioè per $FVZ = BVN$ il suo valore dato nel § 43. Ora $\phi = \frac{E\epsilon}{EU} = \frac{z}{u}$, ed inoltre in virtù della

relazione superiore fra u, u' abbiamo

$$\frac{u'(a+u)(k'-v)}{(a-u')(k'+v)} = \frac{a}{a'} \cdot \frac{(k+v)u}{k-v}; \text{ quindi risulterà}$$

$$FZ = \frac{k+v}{k-v} \frac{a}{a'} z. \text{ Siccome questo valore di } FZ \text{ è indi-}$$

pendente dalle quantità u, u' che determinano un raggio particolare ϵM , competerà egualmente a tutti i raggi provenienti dal punto ϵ ; perciò tutti andranno a riunirsi in Z .

45. *Coroll. I.* Siccome Z è punto di riunione dei raggi emananti da ϵ , così gli altri punti della $E\epsilon$ avranno i loro corrispondenti punti di riunione nella linea FZ ; sarà in conseguenza FZ un'immagine della linea $E\epsilon$, avvegnachè sia proprietà dei raggi luminosi di portar seco l'immagine del punto da cui emanano, e dipingerla ove questi vanno a riunirsi.

Riguardando pertanto $E\epsilon$ come un oggetto emanante raggi luminosi sulla lente convessa PP , verrà rappresentata dietro la lente ad una distanza $FB = a$ una piccola immagine inversa dell'oggetto stesso, la cui grandezza FZ è

$= \frac{k+v}{k-v} \frac{a}{a'} z$, e trascurando la grossezza della lente sarà $FZ = \frac{a}{a'} z$; z essendo la grandezza assoluta dell'oggetto $E\epsilon$.

Se $E\epsilon, FZ$ si avvolgono intorno all'asse EF , produrranno due cerchi, il secondo dei quali sarà l'immagine del primo.

46. *Coroll. II.* L'espressione superiore della grandezza dell'immagine quando trascurasi la grossezza della lente, cioè $FZ = \frac{a}{a'} z$, dimostra che il raggio luminoso ϵH con-

dotto pel mezzo H della lente non subisce rifrazione alcuna nell'attraversarla, risultando da essa i due triangoli $EH\epsilon, FHZ$ simili; e perciò ϵHZ una linea retta.

Un raggio che da un qualunque punto ϵ di un oggetto dirigesì al centro di una lente, chiamasi *raggio principale*.

47. *Scolio.* Si può verificare facilmente coll'esperienza la proprietà delle lenti enunziata nel coroll. I., di dipingere cioè le immagini inverse degli oggetti. Si ponga una lente nel foro di una finestra chiusa, e nell'interno della camera si vada allontanando ed avvicinando alla lente medesima un foglio di carta bianca; quando questo trovasi nelle vicinanze della distanza focale, vi si vedranno dipinte le immagini degli oggetti esterni in una situazione inversa coi loro colori tanto più vivacemente quanto minore copia di estranea luce penetrerà nella camera. Si riscontrerà ancora esservi una sola posizione della carta in cui la immagine di un dato oggetto si presenta precisa e bene determinata; le immagini degli oggetti lontanissimi non sono precise che stabilendo la carta nella giusta distanza focale della lente.

*Metodi per determinare la distanza focale
di una lente.*

48. La formula fondamentale $\frac{1}{p} = \frac{m-1}{r} + \frac{m-1}{r'}$ data al § 40 di questo Capitolo darà sempre con molta facilità la distanza focale p , quando accuratamente si conoscano i raggi delle due sue superficie, e l'indice di rifrazione.

Ora data una lente, bene spesso s'ignorano i raggi delle superficie delle forme nelle quali fu annotata; oltre di che questi variano sensibilmente per il continuo attrito nel polimento che gli artefici vi fanno di molte lenti. È quindi d'uopo indicare i mezzi che si possono adoperare per determinare direttamente la grandezza della distanza focale.

1.° *Per le lenti convesse, e più generalmente di convergenza.* Si apparecchierà una scala sopra piccolo regolo di metallo o di legno, divisa in pollici e linee del piede, o pure in decimetri e centimetri; sarà preferibile la scala in parti del piede di Parigi, poichè pressochè tutti i nostri migliori artefici adoperano quella misura. Tale scala si applicherà ad angolo retto sopra una piccola tavola ricoperta di una carta bianca, di figura rettangolare, di 3 a 4 pollici di lato in modo che lo zero della divisione co-

minci dal piano della tavola. Tenendo la lente fra due diti, e movendola lungo la scala parallelamente al piano della carta, si opponga al sole inclinando l'intero apparato all'orizzonte per modo che si porti al piede della scala in una distanza uguale presso a poco alla semiapertura della lente la immagine solare, e si vada lentamente avvicinando ed allontanando finchè il circoletto luminoso, che la rappresenta sia il più piccolo possibile. Le divisioni segnate nella scala in quel punto in cui l'immagine è la più piccola e la più precisa possibile daranno la cercata distanza focale.

Se la lente abbia una distanza focale di 3 o 4 pollici, e quindi una sensibile apertura, riesce difficile di stimare quando l'immagine solare sia la più precisa e la più piccola possibile in grazia del forte suo splendore che l'oscurisce ed abbaglia la vista. In tal caso si ottiene con grande esattezza la distanza focale ricoprendo la superficie superiore con una carta, nella quale siansi fatti tre o quattro fori sottili con un ago; i raggi di luce solare introdotti per questi fori alla lente si riuniscono esattamente in un sol punto che è il foco della lente, e può quindi mediante la scala ottenersi con somma facilità la misura della distanza focale.

Se manchi la luce solare si opporrà la lente tenuta lungo la scala ad un oggetto o ad una fabbrica molto remota, di cui si vedrà nella carta a piedi della scala stessa dipinta una piccola immagine inversa, e quando questa divenga precisa e distinta, la carta starà nel foco della lente, e dalle divisioni tosto si avrà la cercata distanza focale.

I precetti superiori daranno con lodevole precisione la misura della distanza focale, se questa sia di pochi pollici; ma per le maggiori lenti obbiettive, nelle quali talvolta cede anche i tre o quattro piedi, la precisione delle immagini non viene visibilmente alterata se di qualche linea si avvicinino o si allontanino dalla carta ove vengono raccolte. Quindi non si può giungere a grande esattezza con simili mezzi, ed in tali casi molto è da commendarsi la seguente regola data dal celebre astronomo Maskeline, la quale si fonda sopra la proprietà essenziale di un cannocchiale, che sarà in seguito dimostrata, ed è che per

la visione distinta i raggi devono entrare paralleli nella lente obbiettiva, e sortirne paralleli dall'oculare.

» Si accomodi un cannocchiale alla visione distinta di
 » un oggetto lontanissimo, indi si faccia tenere la lente
 » di cui cercasi la distanza focale contigua all'obbiettivo
 » del cannocchiale, sicchè l'asse del medesimo coincida
 » quanto più prossimamente si può con l'asse della lente,
 » e per l'oculare si riguardi un libro stampato che si va-
 » da avvicinando ed allontanando lentamente dalla lente,
 » e si fermi in quel punto in cui i caratteri ne apparisco-
 » no chiari e distinti. In tale stato la distanza del libro
 » dalla lente sarà la cercata distanza focale ».

In fatti quando i caratteri si troveranno esattamente nel foco, i raggi da essi provenienti sortiranno paralleli dalla seconda superficie della lente, ed in tale stato cadendo nell'obbiettivo del cannocchiale, che gli è a contatto, la visione sarà distinta.

2.^o *Per le lenti concave, e generalmente di divergenza.* La ricerca della distanza focale di una lente concava è un poco più imbarazzante, poichè non formandosi vere immagini dentro di essa, è forza di misurare i raggi delle superficie concave, o di notare la quantità di cui divergono i raggi paralleli mentre sortono da siffatte lenti.

Si giunge poi a misurare agevolmente il raggio di una superficie concava mediante la riflessione dei raggi di luce nel modo seguente. Ad un'apertura di 3 a 4 linee di diametro sopra la finestra di una camera oscura si applichi un foglio di carta bianca, e si tenda un sottile filo di seta per il centro di questa apertura; si opponga al raggio luminoso introdotto per essa la superficie di cui ricercasi il raggio, e lentamente si avvicini e si allontani finchè l'immagine del filo prodotta dalla riflessione dei raggi sopra la carta ritornando in gran vicinanza al filo stesso sia ben contornata e precisa. Allora la distanza del filo dalla lente sarà il raggio cercato della superficie concava, essendo facile a vedere che i raggi di luce di un oggetto posto nel centro di uno specchio concavo sono al centro stesso riflessi, ed ivi producono un'immagine tanto più precisa, quanto più levigata ed esatta è la superficie. Ottenuti i raggi r , r' delle due superficie si avrà la distanza focale negativa, e rappresentata dalla formola

$$p = - \frac{r r'}{(m-1)(r+r')} = - \frac{20 r r'}{11 (r+r')} \text{ a motivo di}$$

$$m = \frac{31}{20} \text{ circa, quando trattasi dei vetri.}$$

Si può giungere a determinare la distanza focale delle lenti di divergenza, massime ove questa sia di pochi pollici, con lodevole esattezza mediante la seguente regola di uso frequente presso gli ottici pratici.

» Si ricuopra con una carta la superficie anteriore della lente concava, nella quale sianvi due piccoli fori, distanti » di una quantità che misurasi accuratamente con un compasso. Tenuta la lente presso la scala sopra descritta, » si allontanano e si avvicinano lentamente (opponendola ai raggi solari) finchè nella carta distesa sulla tavola che serve di base, i raggi luminosi trasmessi per i due fori » sieno fra loro distanti precisamente del doppio. Le divisoni della scala corrispondenti danno la distanza focale ».

Sia in fatti (fig. 24) PP' la data lente concava, il cui asse sia KC ; G, G' i piccoli fori della carta per i quali si trasmettono i raggi paralleli del sole $FG, F'G'$ che dalla lente concava sono rifratti, e rivolti in H, H' come se procedessero direttamente dal foco immaginario O ; quando sarà $HH' = 2 GG'$, per la somiglianza dei triangoli HOH, GOG' , sarà pure $DO = 2 OC$; perciò DC la cercata distanza focale.

Delle lenti ustorie.

49. La proprietà delle lenti convesse o piano-convesse di riunire i raggi paralleli in un punto, e di rappresentarvi l'immagine di oggetti lontani, ci conduce a parlare delle lenti ustorie che si adoperano per abbruciare, fondere, carbonizzare e vetrificare mediante i raggi concentrati del sole i corpi più duri. È noto a tutti come i raggi solari concentrati nel foco di una lente di tre a quattro pollici di foco, e di circa due pollici di apertura vi destino un calore abbastanza forte per accendere esca, carta, paglia secca, ed altri corpi facilmente infiammabili, e pare che tale proprietà non fosse incognita nè meno agli antichi,

come può vedersi nell'articolo *Brennglas* del Dizionario di fisica di Fischer, ove si citano i passi degli scrittori greci e latini che con questo argomento hanno rapporto. Solo verso il fine del XVII. secolo il signor Tschirnaußen (*Acta erud. Lips.* 1691 p. 517) si accinse a superare le grandi difficoltà che s'incontrano nella costruzione di una lente convessa tutta di vetro di tre piedi di apertura, e con gravi spese e fatica giunse a costruirne diverse, dalle quali ottenne risultati quanto nuovi altrettanto meravigliosi. Il Duca d'Orleans fece acquisto di una di queste lenti istorie del diametro di tre piedi, di cui la distanza focale era circa 11 piedi parigini, mediante la quale il dott. Homberg fece molte interessanti ricerche intorno alla fusione, calcinazione e vetrificazione dei metalli, che vennero inserite negli Atti della R. Accademia delle scienze per l'anno 1702, ed indi riferite in molti corsi e dizionarij di fisica. Dopo di lui Hartsoecker fu il primo a costruire lenti istorie di vetro massiccio, ed una ne fece di 3 piedi e 5 pollici di apertura, le di cui superficie vennero travagliate in piatti di rame appartenenti ad una sfera di 18 piedi di diametro, che riuscì egregiamente pulita, e di cristallo il più terso.

La difficoltà somma di ottenere dalle fornaci pezzi di vetro così grandi, privi di filamenti e bolle, da per tutto uniformemente diafani, suggerì il ripiego di farle vuote, piegando in figura sferica due grandi lastre di cristallo della grossezza di circa 8 linee, ed accuratamente lavandole tanto internamente che esternamente. Si riuniscono poi e si cementano i due segmenti sferici in modo da formare una lente convessa che si riempie internamente o con ispirito di vino, o con olio di trementina. La prima di queste lenti sembra esser stata costruita dai rinomati ottici Domenico e Lorenzo Selva di Venezia per il signor dott. Lena chimico di Lucca, la quale aveva 3 palmi di apertura, e circa 5 di foco (*Dialoghi ottici di Lorenzo Selva pag. 150*); ma era questa piano-convessa per maggiore facilità di costruzione, ed altre in maggiori o minori dimensioni vennero poi costruite dagli stessi ottici, nelle quali ritennero sempre la forma piano-convessa.

Per aumentare l'attività delle lenti istorie adoperano talvolta i fisici e chimici un'altra lente minore di circa 4 pollici

di apertura, che appellasi collettiva destinata a ricevere il fascio di raggi solari dopo che ha attraversato la lente maggiore, ed è già molto ristretto. Col mezzo di questa seconda lente i raggi si rendono più convergenti, e raccolti in uno spazio più angusto aumentano grandemente di attività. Ciò non di meno se l'attività è maggiore, lo spazio troppo angusto fa sì che non se ne ottenga nella fusione dei metalli quel risultato che sembra dovercene attendere; sembra quindi possa riuscire di molto vantaggio il compenso da Selva immaginato, di far coincidere cioè il foco di una lente ustoria, che opera per rifrazione con quello di uno specchio ustorio, che opera per riflessione, col quale espediente viensi a duplicare l'effetto dei raggi solari senza diminuire lo spazio di attività.

La lente ustoria della maggiore attività di cui si faccia menzione è quella dal signor Bernieres costruita verso il 1774, la quale è convesso-convessa, vuota internamente; la sua apertura è di 4 piedi, la sua totale grossezza nel mezzo di 7 pollici e 9 linee; la grossezza delle lastre di cristallo è di 8 linee, e contiene 140 pinte di spirito di vino o di olio. Credesi che i raggi solari più facilmente ed in maggior copia attraversino le lenti ripiene di olio di trementina di quello che le lenti di vetro massiccio o ripiene di altri fluidi, perciò queste vengono generalmente preferite alle lenti solide, ed hanno inoltre il vantaggio di prezzo minore, e maggiore facilità di costruzione. Noi ci asterremo dal fare qui parola dei risultati ottenuti dai celebri fisici Brisson, Macquer, Lavoisier, come estranei al nostro argomento; solo alle brevi notizie storiche che qui abbiamo riferite, aggiungeremo il calcolo di un esempio che potrà servire di guida agli artefici nella loro costruzione.

50. Sia proposto di costruire una lente ustoria convesso-convessa, le di cui superficie sieno lavorate in piatti sferici di un raggio = 10 piedi parigini. Si potrà dare a queste lenti un'apertura di 20° , con che l'angolo massimo d'incidenza dei raggi provenienti dal centro del sole reputati paralleli sarà di 10° ; i raggi che cadono sull'estremità della lente non si riuniranno esattamente nel foco, ma cadendo in punti al foco molto vicini ajuteranno quelli di mezzo, ed aumenteranno l'effetto totale della lente.

La distanza focale, ponendo $r = r'$, $m = \frac{3}{2}$, come sensibilmente ha luogo nei vetri sarà data dall'equazione

$$p = \frac{r}{2(m-1)} = r; \text{ cioè sarà } p = r = 10 \text{ piedi.}$$

L'apertura della lente sarà $= \frac{20^\circ}{R^\circ} \times 10$ (R° essendo il numero dei gradi contenuti nel raggio, ed $= 57^\circ, 296$); quindi l'intera apertura sarà

$$= 3^p, 49 = 3^p 5^p 11^1 \text{ circa.}$$

La massima grossezza riuscirà

$$= 2 \sin \nu 10^\circ \times 10^p = 0^{pi}, 304 = 3^{pa} 7^1 \text{ circa.}$$

Chiamando z il raggio assoluto del globo solare, a la sua distanza dalla lente, il raggio del circoletto in cui si concentrano i raggi che cadono sulla superficie della lente rivolta al sole sarà $= \frac{a}{a} z = p \frac{z}{a}$ (§ 45); ora è palese

essere $\frac{z}{a}$ il semidiametro del sole, che in numeri rotondi porremo $= 16'$. Chiamando ω il raggio del nominato circoletto sarà

$$\omega = p 16' = p \tan 16' = 10^p 0,004654 = 0^p, 04654; \text{ cioè } \omega = 6^1, 702 \text{ circa.}$$

La densità dei raggi solari starà alla densità dei raggi ristretti nel foco, come la superficie del superiore circoletto sta alla superficie di un circolo avente per raggio la semiapertura della lente. Ora troviamo tale apertura $= 3^p, 49$; e quindi la semiapertura $= 1,745$ piedi $= 251,1$ l. circa. Perciò chiamando δ la densità dei raggi solari, δ' la densità dei raggi naturali, ed osservando che le superficie dei circoli stanno come i quadrati dei loro raggi, avremo $\delta : \delta' :: 16,702^2 : 251,1^2$, quindi

$$\delta' = \left(\frac{251,1}{16,702} \right)^2 \delta = 1404 \delta.$$

Se supponiamo che il calore prodotto dai raggi solari sia proporzionale alla loro densità, si vedrà che ponendo il calore estivo dei raggi solari $= 34^\circ$ del termometro di Reaumur, il calore prodotto in quel piccolo circoletto dai raggi concentrati sarebbe $= 47736$ gradi Reaumuriani.

Tale sarebbe il grado di calore destato in quel piccolo spazio, se tutti i raggi ricevuti nella lente realmente vi si concentrassero. Convien tuttavia osservare che una gran parte è impedita e respinta dalle molecole solide del vetro; inoltre per la diversa rifrangibilità dei raggi non tutti si vanno a riunire al medesimo luogo; quindi il calore destatovi sarà di gran lunga minore. Ciò non pertanto si è osservato che una lente ustoria di dimensioni simili a quella da noi descritta fonde il ferro (1) ed il platino; carbonizza il diamante; desta cioè un calore più intenso dei fornelli chimici più attivi.

CAPITOLO III.

Proprietà generali di un sistema di lenti disposte intorno ad un medesimo asse. Ingrandimento e chiarezza delle immagini vedute attraverso ad un sistema di lenti. Degli occhiali.

51. **N**elle cose seguenti trascureremo per maggiore semplicità la grossezza delle lenti, ed assumeremo al solito che i seni e le tangenti degli angoli d'incidenza e rifratti si confondano sensibilmente con gli angoli corrispondenti. In queste ipotesi passeremo a stabilire le seguenti proposizioni fondamentali per la teoria degli stromenti ottici.

PROPOS. I. *Esporre le equazioni dalle quali dipende il viaggio di un raggio luminoso attraverso di un sistema di lenti disposte intorno ad un medesimo asse, supponendo che il punto luminoso sia in un punto dell'asse prolungato (fig. 25).*

Sia un sistema di lenti, supposte tutte convesse, disposte intorno allo stesso asse EII , e rappresentato da PP , QQ , RR ; E sia il punto luminoso, la di cui immagine sia in F , ove vanno a riunirsi tutti i raggi che partendo

(1) Il ferro si fonde a 17977 gradi del termometro di Farenheit, che corrispondono a 7976° di Reaumur (V. Fischer, *Physique Mécanique* pag. 73. ediz. di Gand 1823).

da E attraversano la lente PP . Il punto F rapporto alla seconda lente diviene l'oggetto luminoso, i cui raggi vengano dalla medesima riuniti in G , ove esisterà una seconda immagine del punto E . Del pari rapporto alla terza lente RR il punto G diviene un oggetto luminoso, e se supponiamo i raggi da esso emanati riuniti in H , ivi esisterà una terza immagine, e così di seguito.

In tal guisa il viaggio del raggio luminoso Ep nell'attraversare successivamente tutte le lenti del dato sistema sarà, come la figura indica, $EpFqGrH\dots$

Posto ciò, sia $EA = a \dots AF = \alpha$

$FB = b \dots BG = \beta$

$GC = c \dots CH = \gamma$ ec.

La distanza focale della prima lente sia $= p$

seconda lente $= q$

terza lente $= r$ ec.

Sia inoltre la distanza della prima dalla seconda lente $= d$, della seconda dalla terza lente $= d'$, e così delle altre.

Fra le precedenti quantità avranno luogo le seguenti equazioni

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{a} + \frac{1}{z} \quad \text{ed inoltre } d = \alpha + b$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{b} + \frac{1}{\beta} \quad d' = \beta + c \text{ ec.}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{c} + \frac{1}{\gamma} \text{ ec.}$$

le quali saranno tante di numero quante si richiedono per determinare le incognite $\alpha, \beta, \gamma, b, c \dots$. Così per tre lenti avremo le cinque riferite equazioni, per determinare le cinque incognite $\alpha, \beta, \gamma, b, c$, dovendosi riguardare come data la distanza a del punto radiante dalla prima lente, e come date le distanze scambievoli delle lenti nell'assunto sistema; ed in generale è facile vedere che per n lenti avremo $2n - 1$ equazioni con altrettante incognite.

Scolio. Noi abbiamo a vero dire supposte tutte le lenti convesse; ma le riferite equazioni sono generali, giacchè se una o più lenti divenissero concave, non si dovrebbe in esse fare altro cambiamento che supporre le distanze focali ad esse corrispondenti come negative.

Così pure se alcune delle quantità $\alpha, \beta, \gamma, b, c$ divenissero negative, avrebbero una posizione contraria a quella che loro abbiamo assegnato nella *fig. 25*. Con queste avvertenze sarà facile applicare le superiori equazioni a ciaschedun caso particolare.

52. PROPOS. II. *Determinare gli angoli in F, G, H, sotto i quali un dato raggio luminoso Ep taglia l'asse dopo il suo passaggio per ciascheduna lente.*

Se pongasi $Ap = x$, i valori degli angoli del raggio luminoso con l'asse saranno espressi come segue:

$$\begin{aligned} \text{Dopo la rifrazione per la prima lente sarà } AFp &= \frac{x}{\alpha} \\ \text{per la seconda lente . . } BGq &= \frac{bx}{\alpha\beta} \\ \text{per la terza lente . . . } CHr &= \frac{bcx}{\alpha\beta\gamma} \\ \text{per la quarta lente} &= \frac{bcdx}{\alpha\beta\gamma\delta} \end{aligned}$$

e così di seguito.

L'espressione dell'angolo AFp è evidente per se stessa; l'angolo $BGq = \frac{Bq}{BG} = \frac{Bq}{\beta}$; ma $Bq = BF \cdot F = \frac{bx}{\alpha}$,

quindi $BGq = \frac{bx}{\alpha\beta}$. In simil guisa si troveranno successivamente tutti gli altri.

53. Coroll. I. Se chiameremo x', x'', x''' ec. le distanze dei punti dall'asse, nei quali il raggio luminoso incontra successivamente la seconda, terza, quarta cc. lente, ossia se porremo $Bq = x', Cr = x''$ ec. avremo

$$\begin{aligned} x' &= \frac{bx}{\alpha} \\ x'' &= \frac{bcx}{\alpha\beta} \\ x''' &= \frac{bcdx}{\alpha\beta\gamma}, \text{ e così per le altre lenti.} \end{aligned}$$

E se alcuna delle quantità x', x'', x''' divenisse negativa, il raggio luminoso incontrerebbe l'asse da una parte opposta a quella indicata nella figura. Pertanto una quantità ad indice dispari negativa si riferirebbe ad un incon-

tro del raggio luminoso della lente al di sopra dell'asse; mentre per una quantità ad indice pari negativa l'incontro seguirebbe sotto l'asse.

54. *Coroll. II.* Se l'oggetto E è situato ad una distanza infinita, sarà $a = p$, ed i raggi entreranno nella prima lente paralleli all'asse. Se si vuole che sortano dall'ultima lente paralleli all'asse medesimo, conviene che sia essa disposta in modo che il suo foco coincida col punto di riunione della lente precedente, ove è dipinta l'immagine, poichè allora dopo avere attraversato l'ultima lente vanno a riunirsi ad una distanza infinita. Acciò questa condizione sia adempiuta dovrà l'ultima delle lettere latine $a, b, c, d \dots$ uguagliare la distanza focale dell'ultima lente. Noi aggiungiamo eziandio i valori di x', x'', x''' in questo caso particolare, il quale, come vedremo in seguito, è quello dei cannocchiali.

Sarà cioè, perchè i raggi sortano paralleli

da due vetri... $b = q$ ed $x' = \frac{q x}{p}$

da tre vetri... $c = r$ ed $x'' = \frac{b r x}{\beta p}$

da quattro vetri $d = s$ ed $x''' = \frac{b c s x}{\beta \gamma p}$, e così in seguito.

55. *Coroll. III.* Se sarà Ep l'ultimo raggio che dal punto E viene condotto all'estremità della lente PP , e da questa rifratto verso le altre, saranno le quantità x, x', x'', x''' ec. le semiaperture richieste per le lenti, affinchè il raggio luminoso possa attraversarle tutte senza impedimento. Quindi se x, x'', x''' ec. avranno con x il rapporto esibito nel num. precedente, è palese che per l'ultima lente sortiranno in un cilindro luminoso tutti i raggi che parallelamente all'asse entrarono per la prima.

56. *PROPOS. III.* Essendo dato un sistema di lenti (che al solito supporremo convesse) PP, QQ, RR, SS ec. ed una linea Ee perpendicolare al loro asse comune ET , si domanda la situazione e grandezza di ogni immagine da Ee prodotta dopo il passaggio dei raggi luminosi per ciascuna lente (fig. 26).

Sia per la lente PP , F il punto di riunione dei raggi

provenienti da E ; per la lente QQ sia G il punto di riunione di F ; per la lente RR' , H il punto di riunione di G ; I quello di H per la lente SS , e così di seguito. Il cammino del raggio principale eA , il quale dal punto estremo e dell'oggetto passa irrefratto per la prima lente, sia $eAqrsi \dots$ donde apparisce che dovrà essere O il punto di riunione di A , O' quello di O ; O'' quello di O' ec.

Applicando ora a ciascheduna lente ciò che al § 46 si è detto per una lente sola, si vedrà che $F\zeta$, $G\eta$, $H\theta$, Ii ec. rappresenteranno la grandezza e posizione delle immagini successivamente prodotte da ciascheduna lente del sistema. Ciò posto, si ritengano le denominazioni della proposizione precedente, ed inoltre si ponga

$$Ee = z, F\zeta = z', G\eta = z'', H\theta = z''', Ii = z'''' \text{ ec.}$$

Sarà, per lo stesso § 46, trascurando la grossezza delle lenti, e considerando ogni immagine come un oggetto rapporto alla lente seguente

$$1. \text{ immagine } z' = \frac{\alpha}{a} z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{inversa}$$

$$2. \text{ immagine } z'' = \frac{\beta}{b} z' = \frac{\alpha\beta}{ab} z \quad . \quad . \quad \text{diretta}$$

$$3. \text{ immagine } z''' = \frac{\gamma}{c} z'' = \frac{\alpha\beta\gamma}{abc} z \quad . \quad . \quad \text{inversa}$$

$$4. \text{ immagine } z'''' = \frac{\delta}{d} z''' = \frac{\alpha\beta\gamma\delta}{abcd} z \quad . \quad . \quad \text{diretta}$$

e così delle altre.

Se invece della grandezza lineare z dell'oggetto Ee ci piacesse d'introdurre l'angolo $E Ae$, che rappresenteremo con ϕ , sotteso dal medesimo nel centro della prima lente, basterà scrivere da per tutto ϕ in luogo $\frac{z}{a}$, e si avrà così

$$z' = \alpha \phi; z'' = \frac{\alpha\beta}{b} \phi; z''' = \frac{\alpha\beta\gamma}{bc} \phi; z'''' = \frac{\alpha\beta\gamma\delta}{bcd} \phi \text{ ec.}$$

57. *Scolio.* Se alcuna di queste quantità diviene negativa, sarà un indizio che in quel particolare sistema di lenti l'immagine corrispondente acquista una posizione inversa a quella della figura 26. Pertanto le quantità ad

indice dispari negative si riferiscono ad immagini dirette, mentre quelle ad indice pari negative porgono un'immagine inversa.

58. PROPOS. IV. *Conoscendo le aperture Bq , Cr , Ds da darsi alle lenti, affinchè il raggio principale eA le attraversi tutte senza impedimento, determinare i punti nei quali esso taglierà l'asse, e l'angolo sotto di cui lo taglierà.*

Sieno le aperture delle lenti espresse in parti delle loro rispettive distanze focali come segue

per la II. lente . . . $Bq = \pi q$

III. lente . . . $Cr = \pi' r$

IV. lente . . . $Ds = \pi'' s$ ec.

π , π' , π'' essendo frazioni date; q , r , s le distanze focali della seconda, terza, quarta ec. lente; e s'indichi, come sopra, con ϕ l'angolo $E A e$.

Sarà

$$BO = \frac{\pi q}{\pi - \phi}; \quad . \quad . \quad . \quad \text{l'ang. } BOq = \pi - \phi$$

$$OC = \frac{\pi' r}{\pi - \phi}$$

$$O'C = \frac{\pi' r}{\pi' - \pi + \phi}; \quad . \quad \text{l'ang. } CO'r = \pi' - \pi + \phi$$

$$O'D = \frac{\pi'' s}{\pi' - \pi + \phi}$$

$$O''D = \frac{\pi'' s}{\pi'' - \pi' + \pi - \phi}; \quad \text{l'ang. } DO''s = \pi'' - \pi' + \pi - \phi$$

ec.

Di fatti, rapporto alla seconda lente QQ il punto O è il punto di riunione dei raggi procedenti da A ; quindi per il § 40 si avrà $\frac{1}{q} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{BO}$, donde si ottiene

$$BO = \frac{q \cdot AB}{AB - q}; \quad \text{ma } AB = \frac{Bq}{BAq} = \frac{\pi q}{\phi}; \quad \text{sostituendo}$$

$$\text{questo valore, e riducendo, si ottiene } BO = \frac{\pi q}{\pi - \phi}; \quad \text{l'an-}$$

$$\text{golo } BOq = \frac{Bq}{BO}, \quad \text{dalla quale, sostituiti i valori di } Bq$$

$$\text{e di } BO, \text{ si deduce } BOq = \pi - \phi.$$

Dal triangolo $CO r$ si ha $CO = \frac{Cr}{CO r} = \frac{\pi' r}{\pi - \varphi}$,
essendo $CO r = BO q$ perchè opposti al vertice.

Ora essendo O' il punto di riunione di O per la terza lente, avremo del pari $CO' = \frac{CO \cdot r}{CO - r} = \frac{\pi' r}{\pi' - \pi + \varphi}$,
sostituendo cioè il valore di CO sopra trovato, sarà poi
l'angolo $CO' r = \frac{Cr}{CO} = \pi' - \pi + \varphi$. Con simile ragionamento si otterranno gli altri valori.

59. *Corollario.* Dietro i valori di $z', z'', z''' \dots$ (§ 56),
e degli angoli in $O, O', O'' \dots$ non avrà alcuna difficoltà
la ricerca delle distanze $GO, HO', IO'' \dots$ dei punti
d'incontro del raggio principale eA dalle immagini. Si
troverà cioè

$$GO = \frac{\alpha \beta}{b} \frac{\varphi}{\pi - \varphi}$$

$$HO' = \frac{\alpha \beta \gamma}{bc} \frac{\varphi}{\pi' - \pi + \varphi}$$

$$TO'' = \frac{\alpha \beta \gamma \delta}{bcd} \frac{\varphi}{\pi' - \pi' + \pi - \varphi} \text{ ec.}$$

60. *PROPOS. V.* Date le distanze di riunione $a, \alpha, b, \beta, c, \gamma \dots$ e dato l'angolo φ , determinare le aperture $\pi q, \pi' r, \pi' s \dots$ necessarie a darsi alle lenti del sistema perchè il raggio principale eH le attraversi tutte senza impedimento (fig. 26).

La quantità $Bq = \pi q$ trovasi riflettendo che è
 $= AB \tan BAq = (\alpha + b) \varphi$.

Per trovare Cr si riflettasi che i triangoli simili $CO r, GO u$ danno la proporzione

$$Cr - Gu : CG :: \frac{Cr}{CO} : 1; \text{ osservando ora che}$$

$$Gu = z'' = \frac{\alpha \beta}{b} \varphi, \quad CG = c, \quad \frac{Cr}{CO} = \tan CO r = \pi - \varphi,$$

la precedente proporzione diverrà

$$\pi' r - \frac{\alpha \beta}{b} \varphi : c :: \pi - \varphi : 1, \text{ dalla quale tosto si ottiene}$$

$$\pi' r = \left(\frac{\alpha \beta}{b} - c \right) \varphi + \pi c. \text{ Con un simile ragiona-}$$

mento si determineranno le altre semiaperture, che si troveranno come nel seguente prospetto:

per la 2. lente $\pi q = (a + b) \phi$

$$3. \text{ lente } \pi' r = \left(\frac{a \beta}{b} - c \right) \phi + \pi c$$

$$4. \text{ lente } \pi'' s = \left(\frac{a \beta \gamma}{b c} + d \right) \phi + (\pi' - \pi) d$$

$$5. \text{ lente } \pi''' t = \left(\frac{a \beta \gamma \delta}{b c d} - e \right) \phi + (\pi'' - \pi' + \pi) e$$

e così delle altre.

61. *Corollario.* Se il punto *E* fosse situato in una distanza infinita la quantità α diverrebbe uguale alla distanza focale *p* della prima lente; inoltre se i raggi luminosi dovessero sortire paralleli dall'ultima lente, dovrebbe l'ultima delle lettere latine esprimere la distanza della penultima immagine dalla medesima cambiarsi nella sua distanza focale. Per questo caso particolare, che come accennammo ha luogo nei cannocchiali, le superiori equazioni facilmente si convertono nelle seguenti:

Per un sistema

$$\text{di due lenti} \dots \pi = \left(\frac{p}{q} + 1 \right) \phi$$

$$\text{di tre lenti} \dots \pi - \pi' = \left(\frac{p \beta}{b r} - 1 \right) \phi$$

$$\text{di quattro lenti} \dots \pi'' - \pi' + \pi = \left(\frac{p \beta \gamma}{b c s} + 1 \right) \phi$$

$$\text{di cinque lenti} \dots \pi''' - \pi'' + \pi' - \pi = \left(\frac{p \beta \gamma \delta}{b c d t} - 1 \right) \phi$$

e così per gli altri sistemi.

62. *Scolio I.* Non sarà inutile di avvertire che le aperture πq , $\pi' r$, $\pi'' s$ ec. delle quali si parla in questa proposizione sono ben diverse da quelle determinate al § 53, indicate per x' , x'' , x''' ec. Quelle esprimono i rapporti che devono avere fra loro le lenti del sistema perchè tutti i raggi paralleli all'asse *EI* cadenti sulla prima lente sieno rifratti verso le altre, e le attraversino tutte senza impedimento; queste al contrario esprimono i rapporti fra le aperture della seconda, terza, quarta ec. lente, e le loro distanze focali, affinchè sia visibile un oggetto che nel cen-

tro della prima lente sottende in una distanza a l'angolo ϕ .

Dalla osservanza dei primi rapporti dipende la chiarezza dello stromento ottico, mentre dall'osservanza dei secondi dipende la grandezza dello spazio che può abbracciare; spazio a cui dassi il nome di *campo*.

63. *Scolio II.* Per la chiara intelligenza delle esposte dottrine, e di quello che diremo in appresso in proposito dei cannocchiali e dei microscopj crediamo opportuno di dichiarare più particolarmente il modo con cui si deve intendere che i raggi luminosi sortano paralleli dall'ultima lente SS del sistema. Sia pertanto (fig. 26) Ee un oggetto luminoso situato in una distanza $EA = a$ dalla prima lente PP ; dal punto E parte un cono di raggi luminosi che investe la prima lente, e salvi i dovuti rapporti nelle aperture delle successive lenti del sistema si riuniscono in F , in G , in H ove dipingono altrettante immagini del punto E ; se HD è la distanza focale dell'ultima lente SS , il menzionato cono di raggi luminosi sortirà per essa in un piccolo cilindro luminoso, di cui l'asse è HDI , e il cui raggio sarà la quantità indicata per x'' , nè vi sarà altra immagine del punto E dopo il passaggio per SS . Del pari dal punto e partirà un cono obbliquo di raggi luminosi, il di cui asse sarà il raggio principale eA , i quali andranno a riunirsi nei punti ζ , η , θ formandovi altrettante immagini del vertice e . Questi raggi attraversando l'ultima lente SS nell'assunta ipotesi, sortono in un cilindro luminoso obbliquo tale che per O'' passerà il raggio principale, e l'inclinazione di questo cilindro all'asse del sistema sarà misurata dall'angolo $sO''D$; la maggior copia dei raggi luminosi intersecherà in O'' il primo cilindro, si troverà quivi coi prismi frammista, e ristretta nel minore possibile spazio.

Quindi O'' sarà la posizione più vantaggiosa per situare l'occhio, e vedere al tempo stesso l'ultima immagine θH dell'oggetto Ee , la quale sarà in conseguenza veduta sotto l'angolo $DO''s$. La distanza $AE = a$ può essere qualunque; se fosse infinita, come per lo più accade nei cannocchiali, i due coni che hanno i loro vertici in E , ed in e si convertono in due cilindri, gli assi dei quali sono inclinati gli uni agli altri dell'angolo $EAc = \phi$.

*Dell'ingrandimento e del campo
degli stromenti ottici.*

64. *Definizione.* Chiamasi *ingrandimento* di uno stromento ottico il numero che indica quante volte l'angolo ottico sotto cui vedesi l'immagine di un oggetto attraverso ad un determinato sistema di lenti contiene l'angolo ottico, sotto di cui ad occhio nudo vedesi l'oggetto stesso ad una determinata distanza h . Questa distanza h , alla quale deve fingersi situato l'oggetto per determinarne l'angolo ottico ad occhio nudo che serva di unità di misura agli ingrandimenti, è arbitraria, e si suole in diverso modo stabilire dietro la natura e l'uso a cui vengono destinati gli stromenti ottici. Così per i cannocchiali destinati ad osservare oggetti molto lontani fingesi h uguale alla loro distanza dal centro della prima lente, e perciò l'ingrandimento è in questo caso il rapporto fra l'angolo ottico sotto cui vedesi l'immagine e l'angolo ottico sotto di cui direttamente comparisce l'oggetto ad occhio nudo. Per i microscopj poi destinati all'osservazione degli oggetti i più minuti fingesi h uguale a quella distanza alla quale un occhio sano può distintamente leggere ed osservare i piccoli oggetti, la quale ponesi d'ordinario = 8 pollici del piede parigino.

Dietro questa definizione l'ingrandimento è un numero determinato facilmente assegnabile, come mostrerassi nella seguente proposizione. Convien però guardarsi dal confondere l'ingrandimento prodotto da un sistema di lenti con quel senso di aumento o di diminuzione che si percepisce dall'animo nostro nell'osservare un oggetto mediante l'interposizione di un tale sistema, il quale è strettamente connesso collo stato particolare dell'occhio di ogni individuo, colla maggiore o minore abitudine di osservare, coi falsi giudizj che seguono le nostre ordinarie abitudini, in virtù delle quali la stima della maggiore o minore grandezza va sempre congiunta coll'idea della loro distanza, e viceversa. Per la stima di un sì fatto senso non si potrebbero dare norme generali e sicure.

65. *PROPOS. VI.* *L'angolo ottico sotto cui apparisce un oggetto E veduto mediante un sistema di lenti è*

uguale all'angolo formato dal raggio principale Ae con l'asse del sistema dopo il suo passaggio per l'ultima lente SS (fig. 26).

Di fatto posto l'occhio in O'' , in luogo dell'oggetto vedesi l'ultima immagine θH , la quale apparisce sotto l'angolo $DO''s$, e stimasi come un oggetto che si presentasse direttamente sotto del medesimo angolo.

66. PROPOS. VII. *Assegnare la misura dell'ingrandimento prodotto da un qualunque numero di lenti disposte intorno ad un asse comune* (fig. 26).

Sia l'angolo $E Ae = \phi$; la distanza $AE = a$; ed in quanto si considerano le tangenti di piccoli angoli come uguali agli angoli stessi, sarà l'oggetto $eE = a\phi$; perciò veduto ad occhio nudo in una distanza h si presenterebbe sotto l'angolo $\frac{a\phi}{h}$. Ciò posto se domandasi l'ingrandimento prodotto da una sola lente si deve riflettere che il raggio principale eA non incontra l'asse che nel punto A , e quindi conviene applicare l'occhio contro la lente stessa, nel qual caso i raggi sortono per entrare nell'occhio sotto l'angolo ϕ ; indicando quindi con M il cercato ingrandimento, si avrà $M = \frac{h}{a}$.

Per il caso di due lenti ponendo l'occhio in O , l'angolo ottico sotto cui vedesi l'immagine $F\zeta$ è $= BOq = \pi - \phi$ (§ 58). Perciò $M = \frac{h}{a} \frac{\pi - \phi}{\phi}$. Con simile ragionamento si troverà l'ingrandimento per un sistema di tre, quattro e più lenti come nel seguente prospetto.

$$\text{Per 1. lente} \quad M = \frac{h}{a}$$

$$2. \text{ lenti} \quad M = \frac{h}{a} \frac{\pi - \phi}{\phi}$$

$$3. \text{ lenti} \quad M = \frac{h}{a} \frac{\pi' - \pi + \phi}{\phi}$$

$$4. \text{ lenti} \quad M = \frac{h}{a} \frac{\pi'' - \pi' + \pi - \phi}{\phi}$$

e così degli altri..

Chiamando l la distanza dell'incontro del raggio principale coll'asse dall'ultima immagine, sarà $l = G O$ per due lenti, $= H O'$ per tre lenti, e così di seguito. Confrontando i valori di M ora trovati, con i valori di l dati al § 59, sarà per

$$2. \text{ lenti} \quad . \quad . \quad M = \frac{h}{a} \frac{\alpha \beta}{b l}$$

$$3. \text{ lenti} \quad . \quad . \quad M = \frac{h}{a} \frac{\alpha \beta \gamma}{b c l}$$

$$4. \text{ lenti} \quad . \quad . \quad M = \frac{h}{a} \frac{\alpha \beta \gamma \delta}{b c d l}$$

67. *Coroll. II.* Se i raggi devono sortire dall'ultima lente paralleli, come richiedesi per la chiara visione nelle macchine ottiche, i primi valori di M in virtù delle equazioni del § 61 si cangieranno nei seguenti.

$$\text{Per 1. sola lente.} \quad . \quad . \quad M = \frac{h}{p}$$

$$2. \text{ lenti} \quad . \quad . \quad . \quad M = \frac{h}{a} \frac{\alpha}{q}$$

$$3. \text{ lenti} \quad . \quad . \quad . \quad M = \frac{h}{a} \frac{\alpha \beta}{b r}$$

$$4. \text{ lenti} \quad . \quad . \quad . \quad M = \frac{h}{a} \frac{\alpha \beta \gamma}{b c s}$$

$$5. \text{ lenti} \quad . \quad . \quad . \quad M = \frac{h}{a} \frac{\alpha \beta \gamma \delta}{b c d t} \text{ ec.}$$

le quali formole daranno l'ingrandimento dei cannocchiali ponendo $h = a$, $\alpha = p$; e dei microscopj ponendo $h = 8$ pol. (§ 64).

Agli stessi risultati conducono eziandio i secondi valori di M ; in fatti se i raggi sortono paralleli dall'ultima lente, che stabiliremo per es. essere la seconda $Q Q$, l'immagine $G u$ si formerà ad una distanza infinita, e sarà $\beta = \infty$; rimanendo poi $B O$ quantità finita (§ 58) sarà $l = \infty$; quindi $\frac{\beta}{l} = 1$. Si dimostrerà del pari $\frac{\gamma}{l} = 1$ per un sistema di tre lenti, e così degli altri.

68. *Coroll. III.* Se nelle formole del § 54 si cangi p in α per adattarle al caso in cui l'oggetto non sia situato in una distanza infinita dalla prima lente, e si ritiene che

i raggi di luce sortano paralleli dall'ultima lente, si vedrà tosto che i rapporti $\frac{\alpha}{q}$, $\frac{\alpha\beta}{br}$ ec. sono uguali ad $\frac{x}{x'}$, $\frac{x}{x''}$ ec. Quindi gl'ingrandimenti saranno anche espressi nel modo seguente.

Per 2. lenti $M = \frac{h}{a} \frac{x}{x'}$; e nei cannocchiali $M = \frac{x}{x'}$

3. lenti $M = \frac{h}{a} \frac{x}{x''}$ $M = \frac{x}{x''}$

4. lenti $M = \frac{h}{a} \frac{x}{x'''}$ $M = \frac{x}{x'''}$

e così negli altri casi; donde risulta questo teorema generale: „ Qualunque sia l'ordine e la disposizione delle „ lenti di un sistema, se i raggi entrano paralleli all'asse, „ e sortono pure paralleli, l'ingrandimento è uguale all'a- „ pertura della prima lente divisa per il diametro del ci- „ lindro luminoso che sorte dall'ultima lente, supponendo „ le aperture in modo regolate che nessuno dei raggi pa- „ ralleli all'asse che entra per l'obbiettivo sia trattenuto „ o disperso. Se poi i raggi non entrano paralleli all'asse „ il nominato rapporto moltiplicato per $\frac{h}{a}$ darà l'ingan- „ dimento „.

A questo teorema si appoggia la costruzione di un semplicissimo stromento immaginato da Ramsden per misurare l'ingrandimento di un cannocchiale, che descriveremo in appresso.

69. PROPOS. VIII. *Determinare il campo di un sistema di lenti costituenti un dato stromento ottico.*

Chiamasi *campo* lo spazio che uno stromento ottico può abbracciare, e questo misurasi dal doppio dell'angolo $E A e = \phi$ (fig. 26) supponendo che $e A$ sia l'ultimo raggio principale che passando per il centro della prima lente PP può attraversare le seguenti. Dipende pertanto il campo dell'apertura e disposizione delle lenti del sistema, eccettuata la prima, e facilmente si otterrà dalle formole del § 66 ricavandone il valore di ϕ ; esse daranno

$$\begin{aligned}
 \text{Per 2. lenti} \quad . \quad . \quad \phi &= \frac{h \pi}{M a + h} \\
 3. \text{ lenti} \quad . \quad . \quad \phi &= \frac{h (\pi' - \pi)}{M a - h} \\
 4. \text{ lenti} \quad . \quad . \quad \phi &= \frac{h (\pi'' - \pi' + \pi)}{M a + h} \\
 5. \text{ lenti} \quad . \quad . \quad \phi &= \frac{h (\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi)}{M a - h}
 \end{aligned}$$

e così delle altre, nelle quali deve porsi $a' = h$ quando trattasi di un sistema di lenti componente un cannocchiale.

70. *Coroll. I.* Risulta dalle formule esposte in questa proposizione che a cose pari aumentando l'ingrandimento diminuisce il campo, e viceversa, di modo che nei forti ingrandimenti il campo sia presso a poco in ragione inversa dell'ingrandimento.

71. *Coroll. II.* Se le quantità π, π', π'', π''' sono alternativamente positive e negative, il campo dello stromento ottico andrà crescendo, e sarà il più grande possibile quando in questo stato abbiano il massimo valore che possono ricevere. Allorquando una di queste grandezze diviene negativa, la disposizione delle lenti del sistema è tale che il raggio principale eA incontra la lente corrispondente da una parte dell'asse opposta a quella in cui tale incontro succede nella fig. 26. Così se fosse π' negativo il raggio principale dovrebbe incontrare la lente RR sotto l'asse, e quindi la lente stessa essere situata fra il punto O ed il punto B , prima che i raggi siansi riuniti a formare l'immagine G . Questa osservazione è sommamente importante, come vedremo quando si tratterà della più opportuna disposizione delle lenti per formare un buon cannocchiale, od un buon microscopio.

72. *PROPOS. IX.* *Assegnare la situazione più vantaggiosa dell'occhio per vedere l'ultima immagine Ii , ovvero la penultima θH , e tutto il campo dello stromento (fig. 26).*

Per vedere l'ultima immagine Ii è palese che dovendola riguardare come un piccolo oggetto conviene da essa ritirare ed allontanare l'occhio fino a quella distanza, dalla quale è assuefatto ad osservare le ordinarie minute cose, e che nelle viste comuni non affette da particolari malattie

si stabilisce di circa 8 pollici. Per vedere poi l'immagine $H\theta$ e tutto il campo dello stromento ottico è palese dalla stessa figura doversi porre l'occhio in O'' . Qui però bisogna osservare che la visione non sarà distinta se i raggi che partono da ciaschedun punto dell'immagine dopo la rifrazione per la lente SS non abbiano quella inclinazione che si richiede per riunirsi nel fondo dell'occhio in un punto solo. A vero dire l'occhio in virtù della sua artificiosa e mirabile costruzione ha la proprietà di adattarsi ad inclinazioni e distanze diverse per vedere chiaramente gli oggetti; così un occhio abituato a leggere alla distanza di 8 pollici una determinata specie di caratteri può senza incomodo leggere gli stessi caratteri alla distanza di 10 ed anche 12 pollici, come alle minori distanze di 5, 6 e 7 pollici, sebbene da queste diverse distanze i raggi luminosi vi entrino sotto inclinazioni molto differenti. Ciò deve ripetersi dalla facilità che ha la lente cristallina di avvicinarsi ed allontanarsi senza nostra saputa dalla retina ove si dipingono le immagini degli oggetti esterni, e prevedere la situazione conveniente perchè i raggi luminosi partiti da un determinato punto dell'oggetto si riuniscano dopo le varie rifrazioni che subiscono attraversando i diversi umori dell'occhio in un punto solo. Questa proprietà però ha i suoi confini, e se i raggi luminosi partiti da un punto θ abbiano fra loro un'inclinazione troppo forte non possono essere riuniti in un punto della retina, e quindi la visione diviene confusa, ed anche può sparire del tutto. L'osservazione giornaliera ci persuade che nelle viste comuni la visione degli oggetti abbastanza lontani perchè i raggi procedenti da un punto entrando nella piccola apertura della pupilla si possano riguardare come paralleli, è chiara e distinta. Pertanto affinchè l'immagine θH possa essere chiaramente veduta da un occhio posto in O'' conviene che i raggi procedenti da ciaschedun suo punto sortano in direzioni parallele dalla lente SS , e quindi che DH sia uguale alla sua distanza focale, nel qual caso viene a mancare l'immagine Ii , perchè situata ad una distanza infinita.

La distanza del punto O'' dall'ultima lente fu determinata per ciaschedun sistema al § 58, e perciò è inutile di qui richiamare quelle espressioni. Combinando il valore

della distanza DO'' con quello dell'ingrandimento M per un sistema di quattro lenti dato al § 66, si ottiene

$DO'' = \frac{h}{a} \frac{\pi'' s}{M \phi}$, e simili espressioni si ottengono per i

sistemi composti di un diverso numero di lenti; donde in generale si avrà » la distanza del luogo dell'occhio dal-
» l'ultima lente in uno stromento disposto per la chiara

» visione uguale al numero $\frac{h}{a}$ moltiplicato per la semia-

» pertura della medesima, e diviso per l'ingrandimento
» moltiplicato nell'angolo ϕ che misura la metà del campo ».

È inutile di avvertire che in questa equazione essendo ϕ dato in minuti, dovrà ridursi in parti di raggio, lo che si farà dividendolo per il numero dei minuti contenuti nel raggio, che è $= 3437',75$, od anche scrivendo in luogo di ϕ la sua tangente trigonometrica, la quale da esso non differisce sensibilmente per la supposta piccolezza degli angoli.

73. *Scolio.* Può accadere che la distanza dell'occhio dall'ultima lente divenga negativa; allora per abbracciare tutto il campo dovrebbe esso porsi dietro l'ultima lente, la qual cosa essendo di natura sua impossibile dimostra che tanto più chiara sarà la visione e tanto maggiore il campo quanto più si porterà l'occhio vicino alla lente SS .

Del pari l'ingrandimento ed il campo devono sempre prendersi positivamente anche se il calcolo li presentasse sotto forma negativa; in questo caso saremmo soltanto assicurati che l'ultima immagine risulterà in direzione contraria a quella che per un sistema di lenti composto dello stesso numero di vetri li viene assegnata nella nostra figura 26.

Della chiarezza delle immagini negli stromenti ottici.

74. La bontà di uno stromento ottico esige che gli oggetti per esso veduti non risultino troppo languidi ed oscuri nel tempo che si presentano sotto un angolo ottico maggiore di quello con cui sarebbero veduti ad occhio nudo. E quindi di sommo interesse lo stimare il grado di

luce che conserveranno gli oggetti veduti mediante i cannocchiali, od i microscopj, o come volgarmente dicesi, la loro *chiarezza*. Noi intenderemo con questo vocabolo il grado d'impressione prodotto nell'occhio dai raggi di luce provenienti da un determinato oggetto, sia che osservisi ad occhio nudo, sia che vedasene la sua immagine mediante un particolare sistema di lenti. Ora una tale impressione varia colla quantità dei raggi luminosi che per la pupilla vengono introdotti nel nostro occhio, e collo spazio in cui si diffondono sulla retina; ed è palese che essa aumenta colla densità dei raggi luminosi, coll'area della pupilla, e diminuisce coll'aumentarsi dello spazio da essi occupato nella retina. L'ipotesi più semplice che si possa fare, e che nel tempo stesso sembra consentanea alla semplicità delle leggi primordiali della natura, è quella di stabilire la *chiarezza* variabile soltanto colle prime potenze delle enunziate quantità. Ciò posto sarà essa *proporzionale al prodotto della densità dei raggi per l'area della pupilla diviso per l'area della retina in cui si diffondono*.

In questo precetto per la stima della chiarezza si fa astrazione da qualunque accidentale viziosa costruzione dell'occhio, e dai falsi giudizj che siamo soliti di formare senza nostra saputa confrontando il grado di luce degli oggetti da noi rare volte osservati con quello degli oggetti comuni, ed a noi sempre presenti, dai quali falsi giudizj siamo bene spesso tratti a involontarj errori. Dobbiamo altresì osservare che alcun poco diversa risulterà la misura della chiarezza per i raggi lontani dall'asse a motivo della loro inclinazione; noi però ne faremo astrazione sia per la piccola influenza che questo elemento può avere nell'argomento presente, sia perchè qui non abbiamo in vista di ottenere l'assoluta misura della chiarezza, ma piuttosto il suo rapporto al grado d'illuminazione delle immagini ad uno strumento stimato buono dietro ripetute esperienze, e per la stessa ragione trascureremo la quantità dei raggi luminosi respinti dalle molecole del vetro nell'attraversare le diverse lenti del sistema, e supporremo che tutti quei raggi di luce che partendo da un punto dell'asse investono la prima lente vengano per le successive rifrazioni condotti fuori dell'ultima in un cilindro lu-

minoso, il cui raggio sarà x' , ovvero x'' , ovvero x''' , ed in generale $x^{(n-1)}$, se n è il numero delle lenti componenti il sistema. Ciò ben compreso agevolmente s'intenderà il senso delle due seguenti proposizioni, alle quali si appoggia la teorica della chiarezza degli stromenti ottici.

75. PROPOS. X. *La chiarezza di un oggetto qualunque veduto ad occhio nudo, rimane costante qualunque sia la sua distanza dall'occhio finchè l'apertura della pupilla rimane la stessa (fig. 27).*

Sia HOH' l'occhio di un osservatore, HH' il diametro della pupilla; MN la lente cristallina dell'occhio stesso, la quale divide, come si spiega in tutti i trattati di fisica, l'interna cavità in due camerette o capsule, delle quali la HMN chiamasi *camera anteriore*, ed è ripiena di un umore trasparente dietro la sua natura appellato *umore acqueo*; l'altra MON *camera posteriore*, ed è ripiena di una materia trasparente, e quasi gelatinosa nominata *umore vitreo*. Sia PP' una linea situata in una distanza a dal centro C della lente cristallina. Una retta LCO che dal punto L dirigersi al centro C perpendicolare alla superficie anteriore e posteriore della lente chiamasi asse dell'occhio. Ciò posto, se dal punto L parte un cono di raggi luminosi che abbia per base la pupilla HH' , questi penetrano per essa nell'interna cavità dell'occhio, e mercè la sua artificiosa costruzione attraversando le sostanze refringenti di diversa densità di cui è composto, e la lente cristallina medesima, vanno a riunirsi nel punto O della retina, ed ivi dipingono l'immagine del punto L . Del pari dai punti P, P' condotti due raggi al centro C della lente MN passano sensibilmente irrefratti, e determinano nella retina due punti p', p ove si riuniscono tutti i raggi che da P, P' procedendo entrano nell'interno dell'occhio, ed ivi dipingono l'immagine loro, di modo che la linea PP' è rappresentata nella retina da una piccola immagine inversa indicata per $p'p$. Quindi sebbene l'occhio sia composto di varie sostanze diafane di diversa densità e di diversa natura, per ispiegare i fenomeni della visione, possiamo ad essi sostituire una lente convessa che pochissimo si avvicini e si allontani dal fondo dell'occhio, ed ivi dipinga delle piccole immagini, le quali per modo

a noi incognito rappresentano alla nostra mente gli oggetti esterni. La grandezza lineare di queste immagini varia inversamente alla distanza degli oggetti, e quindi le immagini superficiali inversamente ai quadrati delle stesse distanze. Ciò posto, fingiamo un medesimo oggetto luminoso successivamente portato a due distanze a, a' ; le rispettive chiarezze sieno rappresentate per C, C' ; le densità dei raggi luminosi da ciaschedun suo punto inviati all'occhio sieno δ, δ' ; gli spazi rispettivi occupati dalle immagini nella retina alle dette distanze sieno s, s' . Rimanendo costante l'apertura della pupilla, avremo dietro la definizione superiore della chiarezza $C : C' :: \frac{\delta}{s} : \frac{\delta'}{s'}$.

Ma abbiamo dalla fisica $\delta : \delta' :: a'^2 : a^2$; e sopra si dimostrò che $s : s' :: a'^2 : a^2$; quindi $\frac{\delta}{s} = \frac{\delta'}{s'}$; perciò $C = C'$.

76. *Scolio.* Non conviene confondere la chiarezza colla indecisione delle immagini; quella in vero in quanto che misurasi dal grado d'impressione formato dalle molecole luminose sulla nostra retina rimane costante; ma quanto più l'oggetto si allontana, tanto più piccole divengono le immagini nel fondo dell'occhio disegnate, e quindi tanto più ravvicinate ne sono le parti, donde accade che a stento e confusamente distinguonsi, producendo in noi il senso di oggetti indistinti e poco illuminati, e finalmente anche spariscono. Non si possono generalmente assegnare delle regole per fissare i limiti della visibilità d'un oggetto, dipendendo questi dallo stato dell'occhio, dalla copia di luce che riflette, e dagli altri oggetti ai quali può essere congiunto. Si può generalmente ritenere che cessi la visibilità di un oggetto che non sia molto risplendente se l'angolo ottico sotto cui si presenta non ecceda un minuto, quantunque in molte circostanze si vedano e distinguano chiaramente degli oggetti che sottendono mezzo minuto, ed anche due terzi di minuto. Le stelle fisse splendenti per luce propria e vivacissima vedonsi ad occhio nudo, sebbene si provi con solidi argomenti che anche le più brillanti non sottendono un angolo maggiore di un secondo di grado (1).

(1) Il signor Hook assicura che l'occhio il più acuto non può di-

77. PROPOS. XI. *Assegnare la relazione fra la chiarezza di un oggetto veduto ad occhio nudo, e col mezzo di un sistema di lenti.*

Essendo per la proposizione precedente indifferente la distanza a cui si considera l'oggetto per la misura della chiarezza, noi lo riguarderemo veduto ad occhio nudo come situato in quella distanza in cui trovasi collocato realmente dalla prima lente del sistema, e perciò nelle formule esprimenti l'ingrandimento dovremo porre $h = a$. Ciò posto, sia la chiarezza dell'oggetto veduto ad occhio nudo $= C$; attraverso al dato sistema di lenti $= C'$; la densità naturale dei raggi luminosi al loro ingresso sulla prima lente $= \delta$; la loro densità nel sortire dall'ultima lente $= \delta'$.

Sia inoltre la semiapertura della prima lente $= x$; quella dell'ultima lente $= y$ (sarà $y = x'$, ovvero $= x''$ ec. secondo che il sistema è composto di due, tre, ovvero più lenti); il raggio della pupilla mentre rimirasi l'oggetto ad occhio nudo $= \omega$; e mentre rimirasi coll'intervento del dato sistema $= \omega'$; generalmente saranno ω ed ω' quantità differenti, avendo la pupilla la proprietà di aprirsi e restringersi senza nostra saputa secondo la minore o maggiore impressione dei raggi sulla retina. In fine siano s, s' gli spazj occupati nella retina dall'oggetto veduto ad occhio nudo, e col mezzo del sistema. Avremo per il § 74

$$C : C' :: \frac{\delta \omega'}{s} : \frac{\delta' \omega'}{s'},$$

a motivo che le aree della pupilla stanno come i quadrati dei raggi ω, ω' .

Ora supponendo le aperture delle lenti regolate in modo

stinguere un intervallo nel cielo, per es. una macchia nella luna, se non occupi nell'occhio un angolo maggiore di mezzo minuto; così due stelle le quali non sieno distanti di un angolo maggiore di 30" ad occhio nudo sembrano formarne una sola. Riferisce Smith nel suo trattato di ottica tradotto in francese dal signor Pezenas (Vol. I. § 97) di aver assistito ad alcune osservazioni destinate a determinare la visibilità degli oggetti, e che l'uomo di vista più acuta appena poteva distinguere un circolo bianco in un campo nero, o viceversa, quando la distanza dall'occhio sorpassava 5156 diametri, nel qual caso sottendeva l'angolo di 20", la sua immagine nella retina avrebbe dovuto occupare, giusta la sua teoria, $\frac{1}{8000}$ di pollice, spazio piccolissimo che chiama punto sensibile nella retina stessa.

che tutti i raggi che entrano nella prima sortano per l'ultima, le densità δ, δ' saranno in ragione inversa delle aree della prima ed ultima lente, cioè $:: \gamma^2 : x^2$; gli spazj s, s' stanno come i quadrati delle loro omologhe dimensioni lineari; supponendo condotta nell'oggetto una determinata linea, e chiamando M l'ingrandimento, è palese che la detta linea veduta ad occhio nudo starà alla linea veduta col mezzo del sistema $:: 1 : M$, ovvero $:: \gamma : x$ essendo

$M = \frac{x}{\gamma}$ (§ 68). Avremo quindi $s : s' :: \gamma^2 : x^2$. Ma era

$\delta : \delta' :: \gamma^2 : x^2$; quindi $\frac{\delta}{s} = \frac{\delta'}{s'}$, e perciò la superiore proporzione diviene $C : C' :: \omega' : \omega$, dalla quale si ottiene $C' = \frac{\omega'}{\omega} C$.

Risulta da ciò che se l'apertura della pupilla rimane costante, la chiarezza dell'immagine non viene alterata dallo stromento qualunque sia l'ordine e la distribuzione delle lenti di cui è composto, sempre supponendo, che il cilindro di raggi luminosi emesso dall'ultima sia maggiore, o almeno uguale all'area della pupilla, così che possa questa venire ricoperta di luce.

Ora io dico, che se il fascetto di raggi luminosi trasmesso alla pupilla dall'ultima lente sia minore di ω , la chiarezza diminuirà; imperciocchè è palese farsi in tal caso l'impressione come se la pupilla fosse ristretta fino alla misura voluta da tale fascetto; non essendo fino a tal punto nessun raggio impedito dal penetrare fino alla retina. Che anzi chiaramente apparisce potersi nella formula superiore cambiare ω in γ , purchè si escluda il caso di $\gamma > \omega$, e la formula risultante $C' = C \frac{\gamma}{\omega}$ darà la chiarezza degli stromenti ottici riportata all'apertura ordinaria della pupilla, di cui supporremo il raggio $= \omega$.

Dietro molte esperienze di Lambert il minimo diametro della pupilla è di 1,13 linee del piede di Parigi; ed il massimo di linee 3,1; quindi il medio valore di ω sarebbe $= 1,06$; il signor Klügel nel suo eccellente trattato di diottrica analitica stampato a Lipsia nel 1778 adotta

$\omega = \frac{1}{20}$ di pollice; ed in questa supposizione sarà

$C' = 400 C \gamma'$, supponendo γ espresso in parti del pollice di Parigi. Posta la chiarezza C dell'oggetto veduto ad occhio nudo = 1, avremo $C' = 400 \gamma'$, la cui radice 20γ viene da esso appellata *misura della chiarezza*.

Rimane a vedere come si possa riferire la chiarezza di uno stromento a quella di un altro, il cui buon effetto sia stato riconosciuto per esperienza, ed a quest'oggetto sceglieremo il seguente esempio.

Riferisce il signor Huygen che un obbiettivo semplice di 30 piedi di distanza focale con 3 pollici di apertura comportava un oculare di poll. 3,3, presentando le immagini degli oggetti lontani chiare e precise. Qui avremo $p = 360$ poll., $q = 3,3$ poll.; perciò $M = \frac{360}{3,3} = 109$

(§ 67); $x = 1,5$, $\gamma = \frac{1,5}{109} = 0,014$ circa. Quindi

$C' = \overline{0,014}^2 400 C = 0,0784 C$; e se porremo la chiarezza di questo cannocchiale = 1, sarà quella di un altro $= \frac{400 \gamma' C}{0,0784 C} = 5112 \gamma'$.

Potremo quindi in numeri rotondi assumere la chiarezza di un qualunque sistema di lenti riferita al cannocchiale di Huygen come data dall'equazione $C' = 5000 \gamma'$, esprimendo γ in parti del pollice di Parigi.

Degli occhiali.

78. Una delle più utili applicazioni della teoria delle lenti agli usi della vita è senza dubbio quella degli occhiali destinati a riparare, come a ciascheduno è noto, ai difetti della vista, divenuta troppo stanca per la età, o confusa per una viziosa costruzione dell'occhio. L'epoca di una sì importante scoperta sembra rimontare al principio del XIV secolo, e l'onore dell'invenzione viene attribuito a Salvino degli Armati fiorentino, sopra il cui sepolcro nella Chiesa di S. Maria Maggiore leggevasi la seguente iscrizione:

Qui diace Salvino d'Armato degli Armati di Fir.

Inventore degli occhiali.

Dio gli perdoni la peccata. Anno D. mcccxvii (1).

Abbiamo di sopra accennato, che affinchè la visione ad occhio nudo sia chiara e distinta, i raggi di luce provenienti da un punto di un oggetto esterno entrando per la pupilla, ed attraversando l'umore acqueo, la lente cristallina e l'umore vitreo devono in modo rifrangersi da riunirsi tutti in un puoto della retina. L'occhio sano ha la proprietà di potersi modificare o cambiando alcun poco di figura, o rimuovendo la lente cristallina dal suo sito ordinario in modo che la riunione dei raggi abbia luogo nella retina sia che vi entrino paralleli, sia che vi entrino alcun poco divergenti, e già abbiamo indicato che l'ordinaria distanza a cui sono chiaramente visibili i minuti oggetti è di circa 8 pollici, ed a questa distanza generalmente si abitua ad osservarli. Succede spesso d'incontrare degl'individui, nei quali i raggi di luce provenienti da questa distanza non producano la chiara visione degli oggetti, perchè non vengono dagli umori dell'occhio riuniti esattamente nella retina, ed allora è forza variare la distanza per ottenere la chiara visione. Qui evidentemente possono accadere due casi distinti, che esamineremo partitamente.

1.° Se per ottenere la visione distinta si dovranno avvicinare molto di più degli ordinarij 8 pollici gli oggetti all'occhio, e se non vedransi chiaramente gli oggetti lontani, sarà indizio che i raggi convergono troppo presto, e si riuniscono prima di giungere alla retina. Quelli che hanno tale difetto di vista vengono chiamati *miopi*, od anche di *corta vista*, e devono i raggi di luce entrare più divergenti dell'ordinario nell'occhio, perchè dall'interno suo meccanismo vengano riuniti esattamente nella

(1) Il Redi in una lettera scritta a Paolo Falconieri opinò doversi probabilmente l'invenzione degli occhiali a Fr. Alessandro Spina pisano morto nel 1512. Il Manni però, delle cose patrie investigatore diligentissimo, in una sua operetta *Degli occhiali da naso inventati da Salvino Armato gentiluomo fiorentino*, provò con la sopra citata iscrizione letta e descritta da Leopoldo del Migliore doversi all'Armato l'invenzione di tale utile ritrovato.

retina. Siccome le lenti concave hanno la proprietà di rendere divergenti i raggi paralleli, e di far maggiormente divergere i raggi divergenti, così si potrà riparare al difetto del miopismo coll'uso di una lente concava che faccia divergere i raggi provenienti dalla distanza di 8 pollici in modo che entrando poi nell'occhio vengano da esso riuniti e diretti esattamente al fondo della retina. I miopi hanno per lo più gli occhi molto rigonfi e più convessi degli altri.

2.° Se chiaramente si vedranno gli oggetti lontani, e per vedere gli oggetti piccoli sarà necessario allontanarli molto dall'occhio, è chiaro che i raggi paralleli verranno esattamente portati nel fondo della retina, ma i raggi divergenti dalla media distanza non saranno resi abbastanza convergenti per essere riuniti nel fondo dell'occhio, e solo si riunirebbero dietro la retina se venissero prolungati. Quelli che hanno tale difetto si appellano di *vista lunga*, ed anche *presbiti*, e d'ordinario gli occhi loro sono meno convessi; a tale inconveniente vanno per lo più sottoposti gli uomini avanzati in età, o che hanno la vista indebolita dalla lettura ed altre occupazioni. Si ripara a questo inconveniente con l'aiuto di una lente convessa che renda i raggi divergenti o paralleli, o un poco meno divergenti, sicchè entrando poi nell'occhio dalla consueta distanza di 8 pollici possano venire riuniti nella retina esattamente.

79. La difficoltà è pertanto ricondotta a determinare la distanza focale delle lenti che devono adoprare per riparare ai difetti tanto dei miopi, come dei presbiti. Perciò supponiamo che un occhio difettoso possa leggere ad una distanza a , e riguardiamo l'occhio come una lente convessa situata nell'apertura della pupilla di una distanza focale p , essendo la distanza della pupilla dalla retina $= a$. Siccome può per ipotesi leggere alla distanza a , i raggi di luce divergenti da questa si riuniranno nel fondo del-

l'occhio, ed avremo l'equazione $\frac{1}{p} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a}$. Si cer-

chi ora quale lente si dovrà applicare immediatamente all'occhio perchè la visione divenga distinta alla distanza h . Sia q la sua cercata distanza focale, ed h' la distanza di riunione corrispondente ad h ; per questa lente avrà luogo

l'equazione $\frac{1}{q} = \frac{1}{h} + \frac{1}{h'}$. Sortendo ora i raggi luminosi convergenti verso una distanza h' da questa lente entrano nella lente sostituita all'occhio, da cui per ipotesi devono riunirsi alla distanza a ; avremo dunque l'equazione

$$\frac{1}{p} = -\frac{1}{h'} + \frac{1}{a}; \text{ ma era } \frac{1}{p} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a}; \text{ quindi sarà } \frac{1}{h'} = -\frac{1}{a}, \text{ e perciò } \frac{1}{q} = \frac{1}{h} - \frac{1}{a}, \text{ dalla quale ricavasi}$$

tosto $q = \frac{ah}{a-h}$, e questa sarà la distanza focale della lente perchè applicata ad un occhio che legge alla distanza a possa leggere alla distanza h .

Cerchiamo ora di quanto varii l'ingrandimento coll'uso di una siffatta lente. Da ciò che abbiamo detto al § 46 è palese che una piccola linea z ad occhio nudo occuperà uno spazio $= \frac{a}{a} z$. Applicata la lente all'occhio avremo un sistema di due lenti, e la grandezza dell'immagine nel fondo dell'occhio si ricaverà dal § 56 ponendo in quelle formule per applicarle al caso presente $a = h$, $a = h'$, $b = -h'$, $\beta = \alpha$. Si avrà così la grandezza cercata $z'' = -\frac{\alpha h'}{h h'} z = -\frac{\alpha}{h} z$, dove il segno negativo indica un'immagine diretta, o vogliamo piuttosto dire nel senso di quella veduta ad occhio nudo. Quindi chiamando M l'ingrandimento od il rapporto delle due immagini, avremo $M = \frac{a}{h}$, facendo astrazione dal segno.

Esempio I. Legga un presbite i caratteri di un libro alla distanza di 24 pollici; quale lente dovrà adoperare per leggerli alla distanza di 8 pollici, e di quanto li vedrà ingranditi? Avremo $h = 8$; $a = 24$; perciò

$$q = \frac{24 \cdot 8}{24 - 8} = 12 \text{ pollici}; M = \frac{24}{8} = 3; \text{ i presbiti, avranno}$$

no dunque il vantaggio di vedere alcun poco ingranditi i caratteri coll'ajuto degli occhiali.

Esempio II. Legga un miope alla distanza di quattro pollici; quale lente dovrà adoperare per leggere alla di-

stanza di 8? Avremo $h = 8$; $a = 4$; perciò

$q = \frac{4 \cdot 8}{4 - 8} = -8$; dovrà dunque adoprarne una lente di foco negativo cioè concava, tale che la sua distanza focale determinata come si prescrive al § 48 sia $= 8$ pollici; sarà poi $M = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$; cioè vedrà impiccoliti gli oggetti.

Potrebbe sembrare a primo aspetto che i miopi ritraessero dagli occhiali piuttosto uno svantaggio che un vantaggio vedendo gli oggetti impiccoliti. Vero è che i vicini oggetti vengono un poco impiccoliti; ma questo leggero discapito è tolto dalla consuetudine, in virtù della quale la grandezza delle minute cose è apprezzata dietro la loro distanza; è poi di gran lunga compensato dalla visione distinta degli oggetti lontani, i quali senza l'aiuto degli occhiali ad essi compariscono mal terminati e confusi, e dal non essere obbligati ad avvicinare soverchiamente all'occhio i libri, le carte e gli altri minuti oggetti dei quali ad ogni momento occorre l'ispezione negli usi ordinarij della vita.

80. Prima di abbandonare questo argomento crediamo utile ed opportuno l'aggiungere alcuni precetti ed alcune regole necessarie ad osservarsi da quelli che abbisognano di occhiali per conservare lungamente l'inapprezzabile tesoro della vista. Giusta il celebre ottico Adams il bisogno degli occhiali si riconosce per i seguenti segni: 1.° quando più del consueto si devono allontanare dagli occhi i piccoli oggetti per vederli distintamente; 2.° quando nelle ordinarie occupazioni si richiede maggiore quantità di luce della solita; 3.° quando gli oggetti vicini attentamente considerati principiano a comparire confusi, e come ricoperti di una tenue ed uniforme nebbia; 4.° quando nel leggere o scrivere, le lettere cominciano ad apparire doppie, od a scorrere e soprapporsi le une sulle altre; 5.° quando gli occhi facilmente si stancano devono sovente chindere o dirigere sopra altri oggetti per continuare nell'ordinaria applicazione. Tosto che una o l'altra delle indicate circostanze si presenta, è giunto il tempo di cominciare l'uso degli occhiali affinchè l'organo della

vista non vada sempre più peggiorando, e si conservi in istato di prestare il suo officio.

Nello scegliere gli occhiali conviene aver riguardo di prenderli tali che si possa leggere e scrivere alla distanza per lo avanti consueta, e cambiarli successivamente quando gli occhi di più in più appianandosi abbisognino di lenti più convesse. Conviene però guardarsi dal cambiarli frequentemente, e senza bisogno; e soprattutto diligentemente adoperare sempre i proprj occhiali perchè l'uso promiscuo di diverse qualità è pregiudizievole. Non si devono adoperare occhiali con casse di corno od acciaio, che appoggiati sul naso stiano molto lontani dall'occhio, perchè hanno ristretto campo, ed i loro assi difficilmente combinano con l'asse dell'occhio; dovendosi piuttosto preferire quelli che raccomandati mediante due sottili bracci alle tempie stanno molto vicini all'occhio; convienc però avere in vista che il mezzo cerchio dell'incassatura appoggiato sul naso sia abbastanza grande perchè gli assi delle lenti coincidano con gli assi degli occhi.

Alcuni credono utile di servirsi di occhiali di gran distanza focale costruiti per l'ordinario in vetro verde per mantenere più lungamente la vista, e che perciò vengano comunemente appellati *di conserva*; ma è facile convincersi che il loro uso è dannoso; imperciocchè per quanto debole sia il grado loro, sempre tende ad alterare alcun poco lo stato dell'occhio; il color verde dà agli oggetti un aspetto diverso, e quando si levano tutto sembra tendere al rosso; prova evidente che alterano l'occhio. Se non si tengono abitualmente, la differenza del colore e della chiarezza è nociva; se poi si tengono sempre alle tempie, è forza di aumentare successivamente la loro convessità, ed in fine per la grossezza dei vetri cessano quasi di essere trasparenti.

Si adopera talvolta da alcuni una lente convessa per leggere che tiensi a mano in una certa distanza dall'occhio; un tale uso è sommamente pericoloso e nocivo; perchè ora muovesi l'occhio, ora la testa, or varia la distanza; ed in ogni circostanza variasi la condizione dell'occhio; oltre a ciò i raggi laterali riflessi dalla superficie del vetro sono pregiudizievole. A queste devono preferirsi quelle doppie lenti che col mezzo di un manico tengonsi

quasi applicate all'occhio, e lodevolmente rimpiazzano gli occhiali ordinarij. Di qualunque specie poi siano le lenti che si adoperano costantemente per rimediare ai difetti della vista, si deve aver cura che sieno lavorate da artefici diligenti e capaci, ben pulite, di terso e nitido vetro scevro da bolle e filamenti, i quali irregolarmente rifrangono la luce.

Il signor Baradelles, ottico distinto di Parigi, sembra essere stato il primo ad introdurre nelle lenti destinate ad uso di occhiali la figura convesso-concava, rivolgendo all'occhio la parte concava, e trovansi commendate siffatte lenti per la estensione e nitidezza del campo. In un rapporto del signor Becicourt, inserito nel IV. vol. degli *Archives des decouvertes* pag. 450, ne viene commendato l'uso, perchè in esse gli errori di sfericità risultino minori. Ciò non sembra interamente vero, poichè dimostreremo nei Capitoli seguenti che in queste lenti gli errori di sfericità sono invece maggiori che nelle lenti piano-convesse e nelle isosceli; ma piuttosto il loro buon effetto deve ripetersi dalla seguente considerazione.

La pupilla per la sua piccola apertura non vede giammai al tempo stesso, e non riceve i raggi luminosi che per una piccolissima parte dei vetri, e per vedere i diversi oggetti con un moto impercettibile dell'occhio volgesi successivamente e con molta rapidità verso questa e quella parte dirigendo ai diversi punti della opposta lente il suo asse ottico. Ciò posto, se supponiamo che i raggi incidenti sul centro della lente sortano col grado di convergenza richiesto dallo stato dell'occhio per essere riuniti nella retina precisamente, quelli che cadranno verso le estremità sortiranno con un diverso grado di convergenza, e quando verso quei punti si dirigerà l'asse della pupilla, i raggi luminosi non si riuniranno più nel fondo dell'occhio, e la visione perciò non sarà distinta. Affinchè gli oggetti remoti si vedessero con la stessa precisione tanto verso gli estremi della lente quanto verso il centro, si renderebbe necessario che rimanesse costante l'angolo dell'asse della pupilla colla direzione dei raggi luminosi in quella parte della lente a cui rivolgesi l'asse medesimo; ed in conseguenza supponendo che i raggi di luce venissero in direzioni parallele alla superficie anteriore,

e che l'asse della pupilla fosse alla medesima perpendicolare quando trovasi diretto verso il centro, dovrebbe sempre rimanerle perpendicolare verso qualunque parte si rivolgesse; donde è facile di concludere che la superficie anteriore della lente dovrebbe appartenere ad una sfera avente per centro il punto intorno a cui ruota l'asse della pupilla nel volgersi dell'occhio. Dietro questa condizione la superficie esterna dovrebbe avere una curvatura molto maggiore di quella che hanno per l'ordinario le più acute lenti adoperate per gli occhiali, e quindi la superficie interna risulterebbe concava, affinchè la distanza focale fosse uguale a quella che richiedesi dallo stato dell'occhio. A vero dire la superficie interna non dovrebbe più essere sferica, perchè verso qualunque parte volgasi l'occhio i raggi vengano tutti riuniti alla medesima distanza; ma la differenza in piccoli segmenti è tollerabile, e l'esperienza dimostra ottenersi un lodevole effetto quando il raggio della superficie concava interna stia al raggio della superficie convessa esterna :: 5 : 2, donde facilmente si determinano i raggi delle due superficie per comporre una lente di data distanza focale. Dietro le stesse considerazioni fu il signor Wollaston condotto alla invenzione dei suoi *occhiali periscopici*, della quale diede l'annuncio nel Giornale di fisica di Nicholson, e che furono per la prima volta costruiti in Inghilterra dai fratelli Dollond. In seguito in Francia, dietro l'impulso del signor Biot, si applicò alla loro costruzione il signor Cauchoix, ed ottenne l'approvazione universale, come rilevasi da una notizia che lo stesso Biot ne diede nel *Moniteur* del 21 Settembre 1813 inserita anco negli *Archivj* delle scoperte vol. VI. pag. 344. Nei primi occhiali da esso costruiti la superficie esterna imitava la figura dell'occhio, in modo da presentare all'incirca la stessa curvatura ai raggi luminosi da qualunque parte vi si dirigano, la superficie interna era sferica e concava. Sebbene questi producessero un buon effetto, ed abbracciassero un gran campo, erano tuttavia sottoposti ad un notevole inconveniente quando riguardavasi un oggetto molto luminoso, come per es. una candela od una lucerna ad Argand. I raggi di luce riflessi dalla seconda superficie del vetro venivano dalla prima ripercossi e rimandati all'occhio; ed a motivo della sua

figura molto vicina a quella dell'occhio stesso, riunivansi in gran vicinanza della retina in modo da formare nuove immagini abbastanza splendenti e distinte, le quali turbavano l'unità e la chiarezza della visione. Questo inconveniente fu tolto dallo stesso illustre artefice, appiattendolo un poco la superficie esterna con che il foco dei raggi riflessi è situato dietro la retina, e non producono nuove immagini le quali turbino la visione.

CAPITOLO IV.

Teoria delle aberrazioni derivanti in un dato sistema di lenti dalla diversa rifrangibilità dei colori; equazioni alle quali si deve soddisfare per distruggerle.

81. **L**e proprietà di un sistema di lenti esposte nel Capitolo precedente suppongono l'indice di rifrazione costante per tutti i colori, o in altri termini suppongono che un raggio di luce bianca attraversando una sostanza refringente, come appunto è una lente di vetro, non si decomponga e si rifrangano in un modo solo e determinato. Dietro le esperienze di Newton e degli altri fisici ad esso posteriori diffusamente riscritte nel primo Capitolo, la cosa va molto diversamente; imperciocchè un raggio di bianca luce si decompone da una sostanza refringente in una grandissima serie di raggi colorati dal rosso più intenso fino al violetto il più languido, a ciascheduno dei quali corrisponde un diverso indice di rifrazione ed una diversa intensità. Abbiamo ivi stabilito cosa debbasi intendere per *indice medio* di rifrazione come debba stabilirsi secondo il parere del signor Fraunhofer, avendo riguardo alla diversa intensità dei colori (§ 20), cosa intendere si debba per *dispersione*, e per *rapporto di dispersione* nelle varie specie di vetri. Supporremo ora che il lettore abbia presenti quelle dottrine, e che le cose dette nei due Capitoli precedenti siano riferibili ai raggi di media rifrangibilità, ai quali in conseguenza stabiliremo convenire l'in-

dice di rifrazione m , e fingeremo che' per un altro colore qualunque l'indice di rifrazione sia $= m + dm$, dovendosi ritenere dm negativo per i raggi meno rifrangibili dei medj, come sono i rossi e gli aranciati, e positivo per i raggi più rifrangibili, come gli azzurri ed i violetti. Sebbene nelle diverse specie di vetri varii sensibilmente il valore di m per maggiore semplicità riterremo (negli esempj) i risultati di Newton riferiti al § 14, assumendo $m = 1,5500$ medio assoluto degl'indici di rifrazione ivi assegnati, ed $m = 1,5454$ quando si voglia avere riguardo alla diversa intensità dei colori, al qual numero si potrà dare il nome di *medio ottico*; sarà poi per i raggi rossi $m + dm = 1,5400$, e per i raggi violetti $m + dm = 1,5600$, di modo che per i violetti sarà $dm = + 0,01$, e per i rossi $dm = - 0,01$, quando m sia riferibile al medio assoluto. Appareisce da ciò essere dm un piccolo numero, di cui generalmente parlando si potranno trascurare le potenze superiori alla prima; e quindi riguardarlo come un elemento differenziale ordinario del numero m .

Posto ciò, sia (fig. 28) Pp una lente convessa, E nn punto radiante situato nel suo asse in una distanza $EA = a$; F il punto di riunione dei raggi medj; i raggi rossi meno rifrangibili saranno raccolti in un punto più lontano f , ed i raggi violetti più rifrangibili in un punto f più vicino al punto A centro della lente; gli altri raggi dello spettro saranno tutti riuniti fra f ed f .

Le linee fF , $f'F$ le quali sono dell'ordine di dm , e risultano uguali trascurando le potenze di dm superiori alla prima si chiamano *aberrazione longitudinale*.

Se P , p sono i punti estremi della lente, e si prolungano i raggi violetti Pf , pf fino ad incontrare la direzione dei raggi rossi in K , k , le linee FK , Fk chiamansi *aberrazione laterale*; esse pure devonsi riguardare come uguali, e dell'ordine di dm ; e la linea Kk dovrà riguardarsi come una perpendicolare all'asse della lente condotta per il punto F , e però parallela a Pp .

Un circoletto descritto con raggio FK , in cui trovansi riuniti e ristretti nel più angusto spazio possibile i raggi colorati provenienti da E chiamasi *circolo d'aberrazione*.

In fine gli angoli FPf , Fpf essi pure dell'ordine di

dm ed uguali, quando si trascurano le potenze di dm superiori alla prima si nomineranno *angoli di aberrazione*.

82. PROPOS. I. *Per un dato valore di dm determinare la variazione della distanza focale p della lente, e le diverse aberrazioni definite al § precedente (fig. 28).*

Sia, come nel § 38, il raggio della prima superficie della lente $= r$, della seconda $= r'$, $EA = a$; pongasi per i raggi medj $AF = \alpha$, e la distanza focale $= p$. Trascurando la grossezza della lente avremo (§ 40)

$$\frac{1}{p} = \frac{m-1}{r} + \frac{m-1}{r'}; \text{ ed } \frac{1}{p} = \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha};$$

La prima equazione differenziata, essendo r ed r' costanti darà . . . $dp = -\frac{dm}{m-1} p$. . . (1)

Differenziando la seconda, e riguardando a come costante si otterrà . $d\alpha = \frac{\alpha^2}{p^2} dp = -\frac{\alpha^2}{p} \frac{dm}{m-1}$. (2)

le quali equazioni dimostrano che p ed α aumentano diminuendo m , e viceversa. È poi manifesto essere $d\alpha$ ciò che abbiamo sopra chiamato *aberrazione longitudinale*, e perciò nella nostra figura $d\alpha = Ff$.

Il raggio FK del circolo d'aberrazione ottiensi dalla somiglianza dei due triangoli fFK , fAP , i quali danno $fF : FK :: fA : AP$, ossia (chiamando x la semiapertura AP della lente) $d\alpha : FK :: \alpha + d\alpha : x$; donde ricavasi (trascurando $d\alpha^2$, e non facendo attenzione al segno, poichè il raggio di un circolo deve sempre riguardarsi come positivo)

$$FK = \frac{x d\alpha}{\alpha} = \frac{\alpha}{p} \frac{dm}{m-1} x$$
 . . (3)

Per ultimo l'angolo di aberrazione FPf si trova osservando che esso è la differenza degli angoli AFP , AfP che i raggi medj ed estremi fanno con l'asse della lente. Se pertanto chiamiamo ψ l'angolo AFP che i raggi medj fanno con l'asse della lente, sarà $\psi = \frac{x}{\alpha}$, e quindi a motivo di x costante

$$d\psi = -\frac{x}{\alpha^2} d\alpha = \frac{dm}{m-1} \frac{x}{p}$$
 . . (4)

Scolio. Abbiamo trascurato la grossezza della lente; ma è facile a vedere che ciò è permesso, giacchè le correzioni dipendenti dalla grossezza della lente risulterebbero di secondo ordine, e della forma $A \vee dm$, $\vee$ essendo la semigrossezza della lente, A una funzione di a , α , p facile a determinarsi.

83. *Coroll. I.* Se per un caso particolare ponghiamo $m = 1,55$; $dm = 0,01$; sarà $\frac{dm}{m-1} = \frac{1}{55}$; quindi risulterà $dp = -\frac{1}{55} p$; $d\alpha = -\frac{1}{55} \frac{\alpha^2}{p}$; Rag. circ. aberr. $= \frac{1}{55} \frac{\alpha}{p} x$; $d\psi = \frac{1}{55} \frac{x}{p}$.

Coroll. II. Il circolo di aberrazione, ossia lo spazio in cui cadono tutti i raggi di luce provenienti da E , è tanto minore quanto più piccola è l'apertura x della lente. Se il punto E fosse un oggetto, la cui immagine formata dai raggi medj avesse la grandezza kk , in allora la sua grandezza assoluta sarebbe per le formole del § 56 $= \frac{AE}{AF} Kk$, e l'angolo ottico sotto il quale sarebbe ve-

duto dal punto A sarebbe $= \frac{Kk}{AF} = \frac{2x}{55p}$. Ora tutti i raggi medj emanati da E dipingono la sua immagine in F , ed i raggi di diversa rifrangibilità riempiendo il circolo descritto sopra kk vengono a costituire delle frange di diversi colori intorno all'immagine principale, la quale perciò risulta confusa e mal terminata; l'angolo ottico sotto cui dovrà comparire l'immagine del punto E sarà $= \frac{2x}{55p}$.

Così nel cannocchiale di Huyghen, di cui abbiamo fatto menzione (§ 67) si ha $2x = 3$ poll., $p = 30$ piedi = 360 poll., perciò l'angolo ottico sotto cui dovrebbe presentarsi l'immagine di un punto luminoso sarebbe

$= \frac{3}{360 \cdot 55} = \frac{1}{120 \cdot 55} = 31''$ circa (riducendo in secondi di arco la frazione assegnata, lo che si ottiene moltiplicandola per il numero costante $3437,75$, rappresentante il numero dei minuti contenuti nel raggio = 1). Effettiva-

mente le stelle fisse riguardate con cannocchiali comuni di quella lunghezza si presentano sotto un angolo molto minore, cioè di 5" o 6" tutto al più; quindi la confusione risulta minore, lo che si deve attribuire in parte all'ufficio dei diaframmi destinati ad allontanare i raggi laterali, e troppo remoti dall'asse, e più ancora alla debolezza dei raggi azzurri e violetti, le impressioni dei quali non sono percettibili dal nostro occhio in faccia al maggiore splendore dei raggi rossi, gialli ed aranciati con che viene a restringersi il diametro percettibile del circolo di aberrazione.

84. PROPOS. II. *Supponendo, come nel problema precedente, un punto luminoso E situato nell'asse comune di un determinato sistema di lenti, ciascheduna delle quali goda di una diversa forza rifrattiva, si domanda l'aberrazione longitudinale per ciascuna lente.*

Siano per la prima lente a, α, p, m le distanze di riunione, la distanza focale, e l'indice di rifrazione; e queste quantità, considerando le successive immagini prodotte dai raggi medj come altrettanti oggetti luminosi per le seguenti lenti, sieno indicate rispettivamente

per la seconda lente da b, β, q, m'

per la terza lente . da c, γ, r, m''

per la quarta lente . da d, δ, s, m'''

per la quinta lente . da e, ϵ, t, m''''

e così di seguito.

Si domandano le successive aberrazioni longitudinali, che saranno espresse da $d\alpha, d\beta, d\gamma, d\epsilon$ ec. La quantità a , come pure le quantità $\alpha + b, \beta + c, \gamma + d, \delta + e$ ec. esprimenti le distanze del punto luminoso dalla prima lente; della prima dalla seconda, della seconda dalla terza ec. si devono riguardare come costanti.

Ciò posto, si ha come nella precedente proposizione per la prima lente

$$dp = -\frac{dm}{m-1}p; \quad d\alpha = -\frac{dm}{m-1}\frac{\alpha'}{p}.$$

Per la seconda lente avremo $\frac{1}{q} = \frac{1}{b} + \frac{1}{\beta}$, che differen-

ziata darà $\frac{dq}{q} = \frac{db}{b} + \frac{d\beta}{\beta}$; ma a motivo di $\alpha + b = \text{co-}$

stante, si ha $db = -d\alpha = + \frac{dm}{m-1} \frac{\alpha'}{p}$; si troverà poi applicando alla seconda lente l'equazione (1) § 82

$dq = - \frac{dm'}{m'-1} q$. Sostituendo per db , dq i loro valori nell'equazione precedente, si otterrà dietro facili riduzioni la seguente equazione

$$d\beta = - \left(\frac{dm}{m-1} \frac{1}{p} + \frac{dm'}{m'-1} \frac{b'}{\alpha'} \frac{1}{q} \right) \frac{\alpha' \beta'}{b'}.$$

Per la terza lente, differenziando l'equazione $\frac{1}{r} = \frac{1}{c} + \frac{1}{\gamma}$,

si ottiene $\frac{dr}{r} = \frac{dc}{c} + \frac{d\gamma}{\gamma}$; ora dalla medesima equazione (1) abbiamo $dr = - \frac{dm''}{m''-1} r$; ed a motivo di

$\beta + c = \text{costante}$ si ha

$$dc = -d\beta = + \left(\frac{dm}{m-1} \frac{1}{p} + \frac{dm'}{m'-1} \frac{b'}{\alpha'} \frac{1}{q} \right) \frac{\alpha' \beta'}{b'}.$$

Sostituiti questi valori, fatte le opportune riduzioni, si troverà

$$d\gamma = - \left(\frac{dm}{m-1} \frac{1}{p} + \frac{dm'}{m'-1} \frac{1}{q} \frac{b'}{\alpha'} + \frac{dm''}{m''-1} \frac{1}{r} \frac{b' c'}{\alpha' \beta'} \right) \frac{\alpha' \beta' \gamma'}{b' c'}.$$

In un modo del tutto simile si otterranno le aberrazioni longitudinali per le lenti seguenti, e qualunque sia il loro numero, l'ultima rappresenterà l'aberrazione totale dovuta alla diversa rifrangibilità della luce nell'attraversare il dato sistema. Riuniremo qui queste finali aberrazioni perchè se ne scorga a primo aspetto la legge ed i rapporti.

Aberrazione longitudinale per un sistema di

$$1. \text{ lente } d\alpha = - \frac{dm}{m-1} \frac{1}{p} \frac{\alpha'}{1}$$

$$2. \text{ lenti } d\beta = - \left(\frac{dm}{m-1} \frac{1}{p} + \frac{dm'}{m'-1} \frac{1}{q} \frac{b'}{\alpha'} \right) \frac{\alpha' \beta'}{b'}$$

$$3. \text{ lenti } d\gamma = - \left(\frac{dm}{m-1} \frac{1}{p} + \frac{dm'}{m'-1} \frac{1}{q} \frac{b'}{\alpha'} + \frac{dm''}{m''-1} \frac{1}{r} \frac{b' c'}{\alpha' \beta'} \right) \frac{\alpha' \beta' \gamma'}{b' c'}$$

$$4. \text{ lenti } d\delta = - \left\{ \frac{d m}{m-1} \frac{1}{p} + \frac{d m'}{m'-1} \frac{1}{q} \frac{b'}{a'} \right\} \left\{ \alpha' \beta' \gamma' \right. \\ \left. + \frac{d m''}{m''-1} \frac{1}{r} \frac{b' c'}{\alpha' \beta'} + \frac{d m'''}{m'''-1} \frac{1}{s} \frac{b' c' d'}{\alpha' \beta' \gamma'} \right\} \frac{1}{b' c' d'}$$

e così per gli altri sistemi, la legge essendo per se stessa palese.

85. *Scolio.* Se la disposizione delle lenti è tale che i raggi di luce provenienti da un punto E dell'asse sortano paralleli all'asse medesimo, come abbiamo veduto dovere accadere per la chiara visione nei telescopj e microscopj, allora le quantità indicanti la finale aberrazione longitudinale divengono infinite; circostanza che ci avvisa non potersi in tal caso riguardare la finale aberrazione come piccolissima. Così in un sistema di due lenti se i raggi di media rifrangibilità sortiranno paralleli all'asse, sarà $\beta = \infty$; e quindi anche $d\beta = \infty$. Non apparisce quindi chiaramente il modo di distruggere siffatta aberrazione con un'opportuna combinazione di lenti dotate di diversa forza rifrattiva e dispersiva. Egli è perciò che uniremo il seguente problema.

86. PROPOS. III. *Nelle medesime ipotesi della proposizione precedente determinare l'angolo di aberrazione, ossia l'angolo che i raggi medj fanno cogli estremi sortendo dall'ultima lente di un dato sistema.*

Sia ψ l'angolo che i raggi medj fanno coll'asse; sarà $d\psi$ il cercato angolo di aberrazione (vedasene la definizione e figura relativa al § 81). Ora chiamando x la semiapertura della prima lente, si dimostrò al § 52 che

$$\begin{aligned} \text{per la 1. lente} \quad . \quad . \quad . \quad \psi &= \frac{x}{a} \\ 2. \text{ lenti} \quad . \quad . \quad . \quad \psi &= \frac{b x}{a \beta} \\ 3. \text{ lenti} \quad . \quad . \quad . \quad \psi &= \frac{b c x}{a \beta \gamma} \\ 4. \text{ lenti} \quad . \quad . \quad . \quad \psi &= \frac{b c d x}{a \beta \gamma \delta} \text{ ec.} \end{aligned}$$

Si avrà dunque differenziando logaritmicamente, ed osservando che x è costante

$$1.^\circ \text{ Per una sola lente } d\psi = - \frac{x}{a^2} da = + \frac{d m}{m-1} \frac{x}{p}$$

(sostituendo cioè per da il suo valore dato nella proposizione precedente).

2.° Per due lenti $\frac{d\psi}{\psi} = \frac{db}{b} - \frac{da}{a} - \frac{d\beta}{\beta}$; ora essendo $a+b$ la distanza costante della prima dalla seconda lente sarà $db = -da$; quindi riponendo per ψ il suo valore si avrà $d\psi = -\frac{(a+b)}{a\beta} x da - \frac{bd\beta}{a\beta} x$. Supponendo che i raggi medj sortano dalla seconda lente paralleli, avremo $\beta = \infty$, essendo da piccolissimo; ponendo quindi per $\frac{d\beta}{\beta}$ il suo valore dato di sopra sarà

$$d\psi = \left(\frac{dm}{m-1} \frac{1}{p} + \frac{dm'}{m'-1} \frac{1}{q} \frac{b'}{a'} \right) \frac{ax}{b}.$$

3.° Per tre lenti si avrà

$\frac{d\psi}{\psi} = \frac{db}{b} + \frac{dc}{c} - \frac{da}{a} - \frac{d\beta}{\beta} - \frac{d\gamma}{\gamma}$; le distanze $a+b$, $\beta+c$ delle lenti essendo costanti avremo $db = -da$; $dc = -d\beta$. Sostituiti questi valori, e riponendo per ψ il suo valore $\frac{bcx}{a\beta\gamma}$, si otterrà

$$d\psi = -\frac{(a+b)cx}{\beta\gamma} \frac{da}{a} - \frac{(\beta+c)bx}{a\gamma} \frac{d\beta}{\beta} - \frac{bcx}{a\beta} \frac{d\gamma}{\gamma};$$

e se $\gamma = \infty$ sarà

$$d\psi = -\frac{bcx}{a\beta} \frac{d\gamma}{\gamma} = \left\{ \frac{dm}{m-1} \frac{1}{p} + \frac{dm'}{m'-1} \frac{1}{q} \frac{b'}{a'} \right\} \frac{a\beta x}{bc},$$

$$+ \frac{dm''}{m''-1} \frac{1}{r} \frac{b''}{a''} \frac{1}{\beta'}$$

e lo stesso dicasi, degli altri sistemi.

87. *Coroll. I.* Apparisce ora chiaramente che sarà tolta per l'ultima lente l'aberrazione longitudinale, ed i raggi estremi sortiranno sovrapposti ai raggi medj, se si soddisfaccia alle seguenti equazioni

per 1. lente $\frac{dm}{m-1} \frac{1}{p} = 0$

2. lenti $\frac{dm}{m-1} \frac{1}{p} + \frac{dm'}{m'-1} \frac{1}{q} \frac{b'}{a'} = 0$

$$\text{per 3. lenti } \frac{d m}{m-1} \frac{1}{p} + \frac{d m'}{m'-1} \frac{1}{q} \frac{b^*}{a^*} + \frac{d m''}{m''-1} \frac{1}{r} \frac{b^* c^*}{\beta^*} = 0$$

$$\text{per 4. lenti } \frac{d m}{m-1} \frac{1}{p} + \frac{d m'}{m'-1} \frac{1}{q} \frac{b^*}{a^*} + \frac{d m''}{m''-1} \frac{1}{r} \frac{b^* c^*}{\beta^*} \\ + \frac{d m'''}{m'''-1} \frac{1}{s} \frac{b^* c^* d^*}{\alpha^* \beta^* \gamma^*} = 0,$$

e così procedendo per un maggiore numero di lenti. Qui è palese che avendo il numero $\frac{d m}{m-1}$ lo stesso segno per un particolare colore in tutte le specie di vetro conosciute, non si potrà distruggere l'aberrazione longitudinale, e l'angolo di aberrazione con un sistema di lenti o tutte convesse, o tutte concave; ma necessariamente dovrà introdursi fra le lenti convesse del sistema una o più lenti concave, le quali avendo una distanza focale negativa con una aberrazione contraria distruggano le aberrazioni delle altre, come dimostreremo in appresso trattando degli obbiettivi acromatici.

88. *Coroll. II.* L'angolo di aberrazione $d\psi$ diminuisce colla semiapertura x della prima lente; ma al diminuirsi di questa diminuisce eziandio il fascetto luminoso che sorte dall'ultima lente, e quindi la chiarezza. Apparisce pertanto la ragione per cui i cannocchiali comuni se hanno una grande apertura presentano le immagini confuse e colorate; se hanno una piccola apertura divengono oscuri.

I valori di $d\psi$ dati nel § 86, quando i raggi medj sortono paralleli all'asse, si possono eziandio scrivere sotto la forma seguente

$$\text{per 2. lenti } d\psi = - \frac{b x}{a} \frac{d\beta}{\beta^*} = - x' \frac{d\beta}{\beta^*},$$

$$\text{per 3. lenti } d\psi = - \frac{b c x}{\alpha \beta} \frac{d\gamma}{\gamma^*} = - x'' \frac{d\gamma}{\gamma^*}$$

$$\text{per 4. lenti } d\psi = - \frac{b c d x}{\alpha \beta \gamma} \frac{d\delta}{\delta^*} = - x''' \frac{d\delta}{\delta^*} \text{ ec.}$$

dove i numeri x' , ovvero x'' , ovvero x''' ec. esprimono per il § 53 la semiapertura dell'ultima lente.

89. Ritenendo la condizione che i raggi medj sortano

paralleli dall'ultima lente, ed osservando che per i raggi meno rifrangibili dei medj, come sono i rossi, dm è numero negativo, mentre per i più rifrangibili, come gli azzurri ed i violetti, è positivo, apertamente rilevasi dalle formule del § 84 che i primi sortiranno convergenti verso l'asse, e lo taglieranno sotto un angolo $= d\psi$, mentre gli altri sortiranno divergenti, di modo che il loro prolungamento incontrerebbe l'asse dietro l'ultima lente sotto un angolo $= d\psi$. La distanza di tali punti d'incontro non si può con sicurezza ricavare dalle formule del citato paragrafo, perchè i valori di $d\beta$, $d\gamma$ ec. divengono infiniti; ma si potrà facilmente ottenere per ogni sistema dal valore di $d\psi$, e dalla semiapertura dell'ultima lente regolata (§ 53) colla condizione che tutti i raggi che entrano per la prima sortano per essa, nell'ipotesi che si possono trascurare le scambievoli distanze dei punti in cui i raggi medj e gli estremi attraversano la medesima ultima lente. In fatti chiamando $x^{(n)}$ questa semiapertura, ed u la distanza dell'incontro con l'asse dal centro della lente, sarà evidentemente (fatta astrazione dal segno) $d\psi = \frac{x^{(n)}}{u}$.

Sostituendo i valori di $x^{(n)}$ e di $d\psi$, si avranno le seguenti equazioni

$$\text{per 2. lenti} \quad \frac{1}{u} = \left(\frac{dm}{m-1} \frac{1}{p} + \frac{dm'}{dm'-1} \frac{1}{q} \frac{b^*}{a^*} \right) \frac{a^*}{b^*}$$

$$3. \text{ lenti} \quad \frac{1}{u} = \left\{ \frac{dm}{m-1} \frac{1}{p} + \frac{dm'}{m'-1} \frac{1}{q} \frac{b^*}{a^*} \right. \\ \left. + \frac{dm''}{m''-1} \frac{1}{r} \frac{b^* c^*}{a^* \beta^*} \right\} \frac{a^* \beta^*}{b^* c^*}$$

e così degli altri sistemi, ove è evidente che se le lenti saranno tutte costruite colla stessa specie di vetro, saranno i numeri $\frac{dm}{m-1}$, $\frac{dm'}{m'-1}$ ec. fra loro uguali.

90. Consideriamo ora ad esempio delle cose precedenti il caso particolare di un cannocchiale astronomico (1) composto di due lenti, e cerchiamo le condizioni, alle quali

(1) Nei cannocchiali la prima lente situata dalla parte dell'oggetto chiamasi *obiettivo*; la seconda dalla parte dell'occhio chiamasi *oculare*.

si deve sottoporre perchè produca un lodevole effetto, essendo costruito di una sola specie di vetro, quando si vanno variando le sue dimensioni ed il suo ingrandimento. In questi sistemi destinati ad osservare oggetti lontani si può supporre che i raggi di luce entrino paralleli per l'obbiettivo, e se devono sortire i raggi medj paralleli per l'oculare, devono i fuochi delle due lenti coincidere, in quanto che si riferiscono alla stessa specie di raggi medj.

Avremo pertanto $a = p$, $b = q$; l'ingrandimento $M = \frac{p}{q}$ (§ 67). Per la chiarezza (§ 77) si richiederà che nell'equazione $My = x$ (ove x rappresenta la semiapertura dell'obbiettivo, y il raggio del fascetto luminoso che sorte per l'oculare) non divenga y minore di quella dimensione che per esperienza si trova in un cannocchiale riputato buono, come per es. in quello di Huyghen; e generalmente dovressi procurare nella variazione delle dimensioni e degli ingrandimenti che risulti y costante.

Qui si avrà $\frac{dm}{m-1} = \frac{dm'}{m'-1}$; perciò

$$d\psi = \frac{ax}{b} \left(\frac{1}{p} + \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{q} \right) \frac{dm}{m-1}, \text{ ovvero ponendo } a = p,$$

$$b = q, \text{ e } Mq = p \dots d\psi = \frac{x dm}{m-1} \frac{M+1}{p} \dots (1)$$

Inoltre sarà $\frac{1}{u} = \frac{dm}{m-1} \left(\frac{1}{p} + \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{q} \right) \frac{a}{b}$, la quale si converte in $\dots \frac{1}{u} = \frac{M(M+1)}{p} \frac{dm}{m-1} \dots (2)$

Nel cannocchiale di Huyghen più volte citato era $x = 1,5$ pol., $p = 360$ pol., $M = 109$. Se ora ponesi

$$\frac{dm}{m-1} = \frac{1}{55} \text{ (quantità relativa ai colori estremi dello spettro solare)}$$

$$\text{si troverà } d\psi = \frac{1}{120} = \frac{3437,75}{120} = 28' 29'';$$

$$u = 1,6 \text{ pol.}$$

Mentre dunque i raggi medj entrano paralleli nell'occhio, i raggi rossi vi entrano convergenti, ed i violetti divergenti di $28 \frac{1}{2}$ circa, e non potranno riunirsi nella retina. Una divergenza così forte dovrebbe certamente ren-

dere molto sensibile la confusione delle immagini, se i raggi estremi ai quali essa si riferisce avessero quella intensità che hanno i gialli e gli aranciati; ma per la loro debolezza producono una impressione piccolissima ed impercettibile in faccia alla più forte dei due nominati colori. Se

si stabilisce $\frac{d m}{m-1} = \frac{1}{260}$ per valutare l'angolo di aberrazione di questi due si troverà $d\psi = 6' 4''$; intorno a che si deve riflettere che il valore di $d\psi$ non si può ottenere con ogni sicurezza mediante le formule abbreviate del calcolo differenziale, e calcolandolo con rigore geometrico si troverebbero angoli molto minori, come dimostra il signor Klügel nella sua Diottrica analitica. Comunque però ne sia dei valori assoluti di $d\psi$ e di u i loro rapporti per una stessa specie di vetri si potranno sempre avere con precisione dalle equazioni (1), (2); donde si conclude, che se sarà la confusione trascurabile od almeno tollerabile in un dato cannocchiale, come per es. in quello di Huyghen, converrà nella costruzione dei cannocchiali comuni far variare M, p, q, x, y in modo che $d\psi$ ed u rimangano costanti ed uguali a quelli del nominato cannocchiale scelto a termine di confronto. Quindi traggono origine le seguenti regole dovute allo stesso Huyghen, e generalmente osservate dai più rinomati fabbricatori di ottici stromenti.

1.° Dovendo per l'equazione (2) essere u costante, dovrà p variare come il prodotto $M(M+1)$, ossia nei forti ingrandimenti, prossimamente come il numero M ; onde si avrà $p = \frac{M}{k}$, k essendo costante, e però $M = k\sqrt{p}$.

2.° Essendo $M = \frac{p}{q}$, sarà anche $q = \frac{p}{M} = \frac{M}{k} = \frac{\sqrt{p}}{k}$; cioè la distanza focale dell'oculare dovrà variare come la radice della distanza focale dell'obbiettivo.

3.° Dovendo per la chiarezza nell'equazione $My = x$ risultare y costante, dovrà x variare proporzionalmente a M , ovvero a $\sqrt{p}$, e quindi la semiapertura della lente obbiettiva sarà data dall'equazione $x = k'\sqrt{p}$, essendo k' un costante.

Quanto ai costanti k, k' che entrano in queste equa-

zioni, si determineranno dietro le dimensioni del cannocchiale scelto a termine di confronto, e sul quale vogliansi gli altri modellare. Così prendendo il pollice per unità di misura dal cannocchiale di Huyghen, in cui era $p = 360$, $q = 3,3$, $x = 1,5$, si troverà $M = 109$, $k = 5,7448$, $\frac{1}{k} = 0,17407$, $k' = 0,079057$.

Vogliasi, per esempio, l'apertura, l'ingrandimento e l'oculare che compete ad un obbiettivo di 40 piedi di distanza focale. Si farà il calcolo mediante le tavole di logarithmi a cinque cifre come segue:

$$p = 40 \text{ piedi} = 480 \text{ poll.}$$

$$\log. \sqrt{p} = 1,34062$$

$$\log. k = 0,75927$$

$$\text{somma} = \log. M = 2,09989; \quad \text{però } M = 126 \text{ circa}$$

$$\text{differenza} = \log. q = 0,58135 \quad q = 3,814 \text{ poll.}$$

$$\log. \sqrt{p} = 1,34062$$

$$\log. k' = 8,89794$$

$$x = 1,732 \text{ poll.}$$

apert. del-

$$\text{somma} = \log. x = 0,23856 \quad \text{l'obbiett.} = 3,464$$

Riferisce il signor Klügel nella sua Diottrica (p. 178) che il celebre astronomo Mayer di Gottinga lasciò una tavola manoscritta nel suo esemplare della diottrica di Huyghen esistente nella Biblioteca di Gottinga, nella quale adotta numeri alquanto diversi dai superiori, forse perchè non trovò nel cannocchiale di Huyghen troppa chiarezza e precisione d'immagini. Secondo questa tavola un cannocchiale di 30 piedi comporta un oculare di pollici 5,77, ed un'apertura di pollici 2,60. In questa ipotesi si ha $p = 360$ poll., $q = 5,77$, $x = 1,30$; donde risulteranno i seguenti numeri:

L'ingrandimento $M = 62,4$; il raggio del fascetto luminoso dell'oculare $y = \frac{x}{M} = \frac{1}{48}$ di pollice circa; l'angolo di aberrazione dei raggi estremi $d\psi = 14' 18''$. In oltre si avrà $k = 3,2845$; $\frac{1}{k} = 0,3045$; $k' = 0,06844$, dic-

109

tro i quali numeri si può ottenere la tavola di Mayer, che qui riferiremo unita a quella di Huyghen (però in estratto) a comodo dei lettori, e guida degli artefici.

TAVOLA

dimostrante le dimensioni dei cannocchiali comuni secondo Huyghen, e secondo Mayer.

Dist. foc. dell'obbiett.	Apertura dell'obbiettivo secondo		Dist. foc. dell'oculare secondo		Amplific. lineare secondo	
	Huygh.	Mayer	Huygh.	Mayer	Huygh.	Mayer
	poll.	poll.	poll.	poll.		
1	0,55	0,46	0,61	1,09	20	11,0
2	0,77	0,66	0,85	1,52	28	15,7
3	0,95	0,82	1,05	1,84	34	19,5
4	1,09	0,94	1,20	2,13	40	22,5
5	1,23	1,05	1,35	2,38	44	25,2
6	1,34	1,15	1,47	2,60	49	27,7
7	1,45	1,24	1,60	2,81	53	29,9
8	1,55	1,33	1,71	3,00	56	32,0
9	1,64	1,41	1,80	3,18	60	34,0
10	1,73	1,56	1,90	3,35	63	35,8
15	2,12	1,84	2,32	4,08	77	44,1
20	2,45	2,12	2,70	4,71	89	50,9
25	2,74	2,37	3,01	5,24	100	57,1
30	3,00	2,60	3,30	5,77	109	62,4
35	3,24	2,81	3,56	6,23	118	67,3
40	3,46	3,01	3,81	6,65	126	72,2
45	3,67	3,19	4,04	7,04	133	76,5
50	3,87	3,36	4,26	7,42	141	80,6
60	4,24	3,68	4,66	8,14	154	88,4
70	4,58	3,98	5,04	8,78	166	95,4
80	4,90	4,26	5,39	9,39	178	102,1
90	5,20	4,52	5,72	9,96	189	108,4
100	5,48	4,77	6,03	10,49	199	114,4

Si omettono in questa tavoletta le dimensioni dei cannocchiali al di sopra di 100 piedi, perchè divengono troppo incomodi a maneggiarsi, e perchè coll'aumentarsi degli ingrandimenti le aberrazioni longitudinali divengono troppo estese, e lo spettro luminoso si estende oltre l'oculare cagionando una confusione intollerabile. Del resto non deve perdersi di vista, che la bontà di un cannocchiale dipende dalla precisione con cui saranno lavorate le lenti, e che dipenderà dall'abilità dell'artefice, come anche dagli usi ai quali viene destinato la scelta di un oculare più corto di quello che nella superiore tavoletta è prescritto; ed in generale sarà cosa lodevole munire un dato obbiettivo di diversi oculari per iscegliere secondo il bisogno ora l'uno, ora l'altro.

*Aberrazioni dipendenti dalla diversa rifrangibilità
dei colori per i punti situati fuori dell'asse.*

91. Fin qui abbiamo considerato gli errori provenienti negli stromenti ottici dalla diversa rifrangibilità dei colori per i raggi emanati dai punti situati nell'asse del sistema. Richiede ora l'ordine naturale che parliamo degli errori e confusione delle immagini derivate dai raggi eterogenei emanati dai punti fuori dell'asse. Per servire alla brevità considereremo il viaggio del raggio principale attraverso ad un sistema di lenti convesse, delle quali trascureremo al solito la grossezza, giacchè dietro il raggio principale si modificano tutti gli altri prossimamente, ed assegneremo le condizioni alle quali si deve soddisfare per rendere le immagini distinte e prive di colori nell'ordinaria ipotesi, in cui i raggi sortono paralleli dall'ultima lente per la chiara visione.

Sia pertanto (fig. 29) $Pp, Qq \dots$ un sistema di lenti convesse disposte intorno al medesimo asse $EABR$; *Ec* un oggetto situato in una distanza $EA = a$ dalla prima lente, e siano per la medesima V, F, R i punti di riunione del punto E per i raggi violetti, medj e rossi. Conducendo pel centro A della lente Pp il raggio principale eA che passa irrefratto fino alla seconda lente Qq , e per i punti V, F, R le linee Vv, Ff, Rr parallele ad

Ee, rappresenteranno esse le immagini dell'oggetto *Ee* prodotte dai raggi violetti, medj e rossi; tra *V* ed *R* vi sarà una serie d'immagini dipendenti dalle altre gradazioni dei colori, nei quali decomponesi la luce, per l'estremità delle quali passerà il raggio irrefratto *eA*. Giunto questo al punto *Q*, verrà dalla lente decomposto nei colori omogenei, e rivolto al luogo dove esisteranno dall'altra parte le relative immagini dell'oggetto *Ee*; i raggi violetti prenderanno la direzione *QV'*, i medj la direzione *QO* tagliando l'asse nel punto *O*, che dicemmo (§ 72) essere la posizione dell'occhio per abbracciare tutto il campo, ed i rossi la direzione *QR'*. Fingendo ora l'occhio verso il punto *O*, riceverà i raggi violetti sotto un angolo maggiore dei raggi medj, e questi sotto un angolo maggiore dei rossi, onde vedrà l'immagine violacea più grande della media, e questa più grande della rossa, e perciò i contorni esterni della medesima tenderanno all'azzurro ed al violetto, mentre gl'interni tenderanno al rosso. Inoltre se i raggi medj abbiano per la disposizione delle lenti quella inclinazione che richiedesi dalla forma dell'occhio per riunirsi nella retina, e produrre la chiara visione, i raggi rossi e violetti entrandovi sotto diverse inclinazioni non si riuniranno in un punto stesso della retina, e quindi avrà origine una doppia confusione dipendente dalla diversa posizione delle immagini, e dalla diversa inclinazione dei raggi eterogenei nel sortire dall'ultima lente *Qq*.

Risulta da tutto ciò, che per la chiara e distinta visione in uno stromento diottrico si richiede 1.° che le immagini *Vv*, *Ff*, *Rr* cadano tutte in uno stesso luogo, o in altri termini che sia distrutta l'aberrazione longitudinale in virtù della particolare disposizione data alla lente *Pp*, od a quelle lenti che di essa tengono luogo nel sistema; 2.° che di qualunque rifrangibilità siano i raggi luminosi, sortendo dall'ultima lente *Qq* incontrino l'asse sotto un'inclinazione costante, ed uguale a quella dei raggi medj, la quale ultima condizione toglierà i colori dai contorni delle immagini. Ciò premesso, passeremo alla soluzione del seguente problema fondamentale.

92. PROPOSIZIONE. *Determinare la variazione dell'angolo O dipendentemente dalla variazione dm dell'in-*

dice di rifrazione dopo che il raggio principale avrà attraversato l'ultima lente di un qualunque sistema.

Ritenute le denominazioni tutte del § 58, gli angoli sotto i quali il raggio principale taglierà l'asse saranno espressi da $\pi - \phi$ per un sistema di due lenti; da $\pi' - \pi + \phi$ per tre lenti; da $\pi'' - \pi' + \pi - \phi$ per quattro lenti, e così di seguito. Quindi se questi angoli vengano per ordine indicati da $i, i', i'', \dots$, rammentando essere ϕ costante, avremo

$d i = d \pi$; $d i' = d \pi' - d \pi$; $d i'' = d \pi'' - d \pi' + d \pi$; e così degli altri, dove in luogo di $d \pi, d \pi', d \pi''$ ec. dovremo scrivere i loro valori ricavati dalla differenziazione delle equazioni del § 60. Per ridurre a forma semplice questi differenziali conviene rammentare che fra le quantità $a, \alpha, b, \beta, c, \gamma, \dots, p, q, r, \dots$ esistono le seguenti equazioni

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha}; \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{b} + \frac{1}{\beta}; \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{c} + \frac{1}{\gamma},$$

ed inoltre $d \alpha + d b = 0$, $d \beta + d c = 0$, le quali ultime derivano dall'essere invariabili le distanze delle lenti.

Dietro ciò l'equazione $\pi q = (\alpha + b) \phi$ del citato § 60 darà $\pi d q + q d \pi = 0$; donde deducesi $d \pi = -\frac{\pi d q}{q}$;

e sostituendo per $\frac{d q}{q}$ il suo valore (§ 82), sarà

$$d \pi = +\frac{\pi d m'}{m' - 1} = d i.$$

Per ottenere $d \pi'$, e quindi $d i'$, si differenzj l'equazione (§ 60) $\pi' r = \left(\frac{\alpha \beta}{b} - c\right) \phi + \pi c$, e si otterrà

$$\begin{aligned} \pi' d r + r d \pi' &= \left(\frac{\alpha d \beta + \beta d \alpha}{b} - \frac{\alpha \beta d b}{b^2} - d c\right) \phi \\ &\quad + c d \pi + \pi d c \\ &= \frac{(\alpha + b) \phi d \beta}{b} + \frac{\beta (\alpha + b) \phi d \alpha}{b^2} + c d \pi - \pi d \beta \end{aligned}$$

(a motivo di $d b = -d \alpha$, $d c = -d \beta$).

Ponendo per $(\alpha + b) \phi$ il suo valore πq , si cangia tosto nella seguente

$$\pi' dr + r d\pi' = \frac{\beta \pi q d\alpha}{b} + \left(\frac{\pi q}{b} - \pi\right) d\beta + c d\pi.$$

Ora differenziando l'equazione differenziale $\frac{1}{q} = \frac{1}{b} + \frac{1}{\beta}$ si ottiene $\frac{dq}{q} = \frac{db}{b} + \frac{d\beta}{\beta} = -\frac{d\alpha}{b} + \frac{d\beta}{\beta}$, e quindi ricavando il valore di $\frac{d\alpha}{b}$, e sostituendolo nella precedente si avrà

$$\begin{aligned} \pi' dr + r d\pi' &= -\frac{\beta \pi dq}{q} + \left(\frac{\pi q}{b} + \frac{\pi q}{\beta} - \pi\right) d\beta + c d\pi \\ &= -\frac{\beta \pi dq}{q} + c d\pi, \end{aligned}$$

distruggendosi il coefficiente di $d\beta$ in grazia dell'equazione $\frac{1}{q} = \frac{1}{b} + \frac{1}{\beta}$.

Da quest'ultima equazione si ottiene il valore di $d i' = d\pi' - d\pi$ così espresso

$$d i' = -\frac{\beta \pi}{r} \frac{dq}{q} - \frac{\pi' dr}{r} + \frac{c-r}{r} d\pi.$$

Se i raggi dall'ultima lente dovranno sortire paralleli, sarà $c=r$, quindi

$$d i' = -\frac{\beta \pi}{r} \frac{dq}{q} - \frac{\pi' dr}{r} = +\frac{\beta \pi}{r} \frac{dm'}{m'-1} + \frac{\pi' dm''}{m''-1}.$$

Si troveranno in modo analogo i valori di $d i''$, $d i'''$ ec.

93. Se il sistema deve dare le immagini degli oggetti senza contorni colorati, dovrà la variazione dell'angolo i corrispondente all'ultima lente essere $= 0$. Quindi la condizione opportuna affinchè i contorni delle immagini siano senza colori sarà espressa in quella delle seguenti equazioni, che corrisponde al numero delle lenti del sistema, sempre che sia disposto in modo che la distanza focale dell'ultima lente combini con l'immagine della precedente.

N.° delle
lenti

Equazioni corrispondenti

$$\text{II. } \pi \frac{d m'}{m' - 1} = 0$$

$$\text{III. } \pi \frac{d m'}{m' - 1} + \frac{\pi' c}{\beta} \frac{d m''}{m'' - 1} = 0$$

$$\text{IV. } \pi \frac{d m'}{m' - 1} + \frac{\pi' c}{\beta} \frac{d m''}{m'' - 1} + \frac{\pi'' c d}{\beta \gamma} \frac{d m'''}{m''' - 1} = 0$$

$$\text{V. } \pi \frac{d m'}{m' - 1} + \frac{\pi' c}{\beta} \frac{d m''}{m'' - 1} + \frac{\pi'' c d}{\beta \gamma} \frac{d m'''}{m''' - 1} + \frac{\pi''' c d e}{\beta \gamma \delta} \frac{d m'''}{m''' - 1} = 0 \text{ ec.}$$

nelle quali deve cambiarsi l'ultima delle lettere latine nella distanza focale dell'ultima lente.

Questa condizione unita a quella del § 87 serve a stabilire un sistema di lenti *acromatico* così detto, giacchè se le condizioni prescritte dalla teoria siano opportunamente e diligentemente eseguite dall'artefice, le immagini saranno prive di colori, e nette nei loro contorni.

CAPITOLO V.

Teoria delle aberrazioni prodotte in un sistema di lenti dalla loro figura sferica. Condizioni per distruggerle, o per ridurne la influenza al minimo valore possibile.

94. **A**bbiamo fin qui supposto che i raggi luminosi passando dall'aria nel vetro venissero rifratti in modo che gli angoli d'incidenza fossero proporzionali agli angoli rifratti. Questa proporzione però è soltanto approssimata, imperciocchè la vera legge della natura è, che i seni degli angoli d'incidenza e degli angoli rifratti mantengano un rapporto costante. Prima di passare pertanto alle applicazioni delle precedenti teorie alla costruzione dei can-

nocchiali e microscopj, rendesi opportuno d'indagare gli errori che possono derivare dall'assunta ipotesi, e di dare i precetti per toglierli od attenuarli quanto è possibile.

Definizione. Sia (fig. 3o) *E* un punto luminoso preso nell'asse *EO* di una lente *Pp*; sia *O* il punto in cui il raggio *EM* rompendosi per la prima superficie *PMP* incontrerebbe l'asse se gli angoli d'incidenza fossero proporzionali agli angoli rifratti; *U* il punto a cui dirigesì quando i seni degli angoli d'incidenza sono proporzionali ai seni degli angoli rifratti. Del pari rompendosi per la seconda superficie al punto *N*, nella prima ipotesi supponiamolo diretto al punto *F*, e nella seconda al punto *V*. Sarà *F* il punto di riunione del punto *E* considerato nei capitoli precedenti; la quantità *FV* chiamasi *aberrazione longitudinale dipendente dalla figura sferica delle lenti*, e più brevemente *aberrazione per la figura sferica*.

Riterremo nelle cose seguenti le denominazioni finora usate, cioè porremo *EA* = *a*, *AH* = *BH* = *v*, *HO* = *k*, *BF* = *α*; la distanza focale della lente = *p*; il raggio *AC* della prima superficie = *r*; il raggio *DB* della seconda superficie = *r'*; *m* l'indice di rifrazione. Fra queste quantità avranno luogo le equazioni seguenti dimostrate nel Capitolo II § 38

$$\frac{m-1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{m}{k+v}; \quad \frac{m-1}{r'} = \frac{1}{\alpha} - \frac{m}{k-v};$$

$$\text{ossia } r = \frac{\alpha(m-1)(k+v)}{k+v+\alpha m}; \quad r' = \frac{\alpha(m-1)(k-v)}{k-v-\alpha m}.$$

Inoltre trascurando la grossezza della lente sarà

$$\frac{1}{p} = \frac{m-1}{r} + \frac{m-1}{r'} = \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha}.$$

95. PROPOS. I. *Poste le cose precedenti, si domandano i valori di OU, e di FV (fig. 3o).*

1.° Si ponga *MX* = *x*, *OU* = *u*, e si avranno evidentemente le proporzioni seguenti

$$EM : EC :: \text{sen } C : \text{sen } EMC$$

$$CU : MU :: \text{sen } CMU : \text{sen } C$$

$$m : 1 :: \text{sen } mMC : \text{sen } CMU.$$

Moltiplicando per ordine si ottiene l'equazione

$$m \cdot CU \cdot EM = MU \cdot EC.$$

Cerchiamo ora i valori analitici delle linee contenute in questa equazione, e proponiamoci di trascurare le potenze superiori ad x' , come piccolissime, in grazia della piccola apertura che si dà alle lenti sferiche. Avremo primieramente $AX = \frac{x'}{2r}$; in seguito

$$EM = \sqrt{a' + \frac{ax'}{r} + x'} = a + \frac{(a+r)x'}{2ar};$$

$$CU = k + v - r - u;$$

$$MU = \sqrt{UX^2 + x'} = UX + \frac{x'}{2UX};$$

Ma $UX = k + v - \frac{x'}{2r} - u$; quindi trascurando i termini al di sopra di x' otterremo

$$MU = k + v - \frac{x'}{2r} - u + \frac{x'}{2k}, \quad \text{ovvero}$$

$$MU = k + v - u - \frac{(k-r)x'}{2kr}; \quad EC = a + r.$$

Sostituiti questi valori nell'equazione precedente, osservando che devono distruggersi in virtù delle equazioni del § 38 sopra riferite tutti i termini indipendenti da x ed u , avremo la seguente equazione

$$\frac{(mk+a)(a+r)(k-r)}{2akr} x' = \{(m-1)a-r\} u,$$

donde si vede che u risulta dell'ordine x' ; riflettendo poi che anche v è dello stesso ordine, chiaramente apparisce che trascurando i termini vx' , ux' avremo ottenuto una soluzione prossima fino ai termini dell'ordine x' , e perciò potremo in luogo di r nella precedente equazione scrivere $\frac{a(m-1)k}{k+a}$; fatte le opportune riduzioni avremo fin-

no ai termini dell'ordine x' , $u = \frac{(mk+a)(a+k)}{2(m-1)a^3k} x'$.

2.^a Per trovare FV , ossia l'aberrazione totale in longitudine osservo che sarà composta di due parti Fv , vV ; la prima Fv trae origine dal non dirigersi più i raggi rifratti dalla superficie PAp verso O , ma verso U ; la se-

conda Vv nasce dalla rifrazione del raggio luminoso per la superficie PBp .

Quanto alla prima parte Fv è palese non essere altro che la variazione indotta in α per una data variazione in

k . Ora si ha $\frac{m-1}{r'} = \frac{1}{\alpha} - \frac{m}{k-v}$; la quale differenziata

dà $\frac{d\alpha}{\alpha^2} = \frac{m dk}{(k-v)^2} = \frac{m dk}{k^2}$ (trasecurando il termine $v dk$);

e ponendo $d\alpha = Fv$, $dk = u$ si avrà

$$Fv = \frac{m\alpha^2}{k^2} u = \frac{m\alpha^2 (mk+a)(a+k)^2}{2(m-1)^2 \alpha^3 k^3} x^2.$$

La seconda parte Vv si troverà facilmente dal valore di u , osservando di scrivere in esso $\frac{1}{m}$ in luogo di m ;

BU in luogo di a ; Hv in luogo di k ; NY in luogo di MX . Qui poi si osservi che si potrà scrivere x in luogo di NY ; k in luogo di BU ; α in luogo di Hv , non differendo queste quantità le une dalle altre che nei termini dell'ordine di x^2 . Con queste avvertenze il superiore valore di u darà

$$\begin{aligned} Vv &= \frac{m(\alpha - mk)(\alpha - k)^2}{2(1-m)^2 (-k)^3 \alpha} x^2 \\ &= \frac{m(mk - \alpha)(\alpha - k)^2}{2(m-1)^2 k^3 \alpha} x^2. \end{aligned}$$

La somma di queste due quantità darà il valore cercato FV . Se per indicare che l'aberrazione in longitudine tende a diminuire il valore di α , facciamo precedere la somma dal segno negativo, dopo facile ed ovvia riduzione si ottiene

$$FV = -\frac{m\alpha^2 x^2}{2(m-1)^2} \left\{ \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{k} \right) \left(\frac{m}{\alpha} + \frac{1}{k} \right) + \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{k} \right) \left(\frac{m}{\alpha} - \frac{1}{k} \right) \right\} \quad (1)$$

Il secondo fattore di questa espressione diviene $= 0$ ponendo $\frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{\alpha}$; quindi dietro la teoria delle equazioni

sarà divisibile per il fattore $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}$, ossia per $\frac{1}{p}$. Sviluppando questo fattore, ed eseguendo l'accennata divisione si troverà per quoziente

$$m \left(\frac{1}{a'} - \frac{1}{a\alpha} + \frac{1}{\alpha'} \right) + \frac{2m+1}{k} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha'} \right) + \frac{m+2}{k^2};$$

Sarà pertanto

$$FV = -\frac{m\alpha'x'}{2(m-1)p} \left\{ m \left(\frac{1}{a'} - \frac{1}{a\alpha} + \frac{1}{\alpha'} \right) + \frac{2m+1}{k} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha'} \right) + \frac{m+2}{k^2} \right\} \quad (2)$$

96. *Coroll. I.* Siccome il valore di FV dipende da k , e questo dai raggi r, r' delle due superficie della lente, e d'altronde in infinite maniere si può determinare r, r' sicchè risulti una lente di determinata distanza focale p , così di tutte queste combinazioni sarà preferibile quella in cui risulti $FV=0$, o se ciò non sia possibile, risulti almeno FV un minimo. Ponendo $FV=0$ avremo per determinare k un'equazione di secondo grado, la quale risolta darà

$$\frac{1}{k} = \frac{2m+1}{2m+4} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha'} \right) \pm \sqrt{\left[\left(\frac{2m+1}{2m+4} \right)^2 \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha'} \right)^2 - \frac{m}{m+2} \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{a\alpha} + \frac{1}{\alpha'^2} \right) \right]}$$

La quantità sotto il segno radicale si può eziandio rappresentare nel modo seguente

$$-\frac{(4m-1)}{4(m+2)} \left(\frac{1}{\alpha'} + \frac{1}{\alpha} \right) - \frac{4m^2+2}{4(m+2)} \frac{1}{a\alpha}$$

che rimane sempre negativa se α ed α' abbiano lo stesso segno, vale a dire se il punto luminoso e la sua immagine cadano dalle opposte parti della lente; risulta allora $\frac{1}{k}$ sempre immaginario, o in altri termini è impossibile fare sparire in questo caso l'errore dipendente dalla figura sferica.

Se $\alpha = \infty$, ed $\alpha = p$, come per lo più accade nei cannocchiali, la quantità sotto il segno radicale diverrà $= -\frac{(4m-1)}{4(m+2)} \frac{1}{p}$, e perciò non vi sarà alcuna lente composta di superficie sferiche che possa riunire esattamente in un punto i raggi paralleli.

97. *Coroll. II.* Affinechè il valore superiore di $\frac{1}{k}$ sia reale conviene che la quantità sotto il segno radicale ri-

sulti positiva. Se pertanto porremo $m = \frac{3}{2}$ come prossimamente ha luogo nei vetri, dovrà essere positiva la quantità $-\frac{5}{49} \left(\frac{1}{a'} + \frac{1}{a} \right) - \frac{11}{49} \frac{1}{a a'}$, ossia dovrà risultare negativa la quantità $\frac{a'}{a} + \frac{11}{5} \frac{a}{a} + 1$, lo che non può succedere a meno che il valore di $\frac{a}{a'}$ non cada fra le due radici dell'equazione $\frac{a'}{a} + \frac{11}{5} \frac{a}{a} + 1 = 0$ (come dimostrasi nella teoria delle equazioni), ossia fra i numeri $-\frac{11 + \sqrt{21}}{10}$, $-\frac{11 - \sqrt{21}}{10}$. Dovrà pertanto cadere $-a$ fra i due numeri $0,642 a$, $1,558 a$, i quali non permettono in pratica alcuna generale applicazione.

98. *Coroll. III.* Essendo α e k funzioni di r , r' determinate dalle equazioni

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{m-1}{r} + \frac{m-1}{r'} - \frac{1}{a}; \quad \frac{1}{k} = \frac{m-1}{m r} - \frac{1}{m a},$$

si potrà agevolmente esprimere il valore di FV per r , r' . Introdotti nel secondo fattore dell'equazione (2) i precedenti valori reciproci di α e di k , fatte a dovere le riduzioni si troverà

$$FV = -\frac{m' \alpha' x^2}{2 p_e} \left\{ \frac{m^3 - 2m^2 + 2}{m^3} \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2} + \frac{2m^2 - 2m - 1}{m'} \frac{1}{r r'} \right. \\ \left. + \frac{3m + 4 - 3m'}{m^3} \frac{1}{a r} - \frac{3m + 1}{m'} \frac{1}{a r'} + \frac{3m + 2}{m^3} \frac{1}{a^2} \right\}$$

Questa formula combina con quella di cui ha fatto uso il celebre J. F. W. Herschel (1) in una Memoria interes-

(1) *On the aberrations of compound lenses and object-glasses* (pag. 240. equaz. (n)). Al § 10 di questa bella e dotta Memoria l'Autore dà un'applicazione delle sue formule in cui pone $m = \frac{5}{2}$. Sembra mi che siavi scorso un errore numerico nel calcolo del coefficiente del termine moltiplicato per $\frac{1}{r}$ da esso nominato β , il quale viene

santissima sopra le aberrazioni delle lenti composte, letta all'Accademia R. di Londra ai 22 Marzo 1821, ed inserita negli Atti di quella Società per il medesimo anno, qualora si riducano le superiori denominazioni a quelle del ch. Autore.

Se per brevità si pone

$$A = \frac{m^3 - 2m^2 + 2}{m^3} \frac{1}{r} + \frac{2m^2 - 2m - 1}{m^3} \frac{1}{rr} + \frac{1}{r^2}$$

$$B = \frac{3m + 4 - 3m^2}{m^3} \frac{1}{r} - \frac{3m + 1}{m^3} \frac{1}{r^2}$$

$$C = \frac{3m + 2}{m^3}$$

$$\text{sarà } FV = -\frac{m' \alpha' x'}{2p} \left(A + \frac{B}{a} + \frac{C}{a'} \right).$$

99. *Scolio.* Quantunque l'errore dipendente dalla figura sferica non si possa esattamente annullare, pure vi è un certo valore di k che lo rende in generale il più piccolo possibile. Di fatti indicando per V la quantità FV abbiamo sopra trovato § 95

$$V = -\frac{m \alpha' x'}{2(m-1)p} \left\{ m \left(\frac{1}{a'} - \frac{1}{a\alpha} + \frac{1}{\alpha'} \right) - \frac{2m+1}{k} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a'} \right) + \frac{m+2}{k'} \right\}$$

ove si vede che la quantità dipendente da k nel secondo fattore è $= 0$, quando $\frac{1}{k} = 0$, e quando

$\frac{1}{k} = \frac{2m+1}{m+2} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{a} \right)$. Fuori di questi due limiti è costantemente positiva, e fra questi due limiti negativa; perciò la quantità V riceverà un minimo valore che determineremo nella seguente

100. *PROPOS. II.* Determinare il valore di k corrispondente al minimo valore di V .

Essendo V funzione di k , dovrà nel caso del minimo

dato $= +\frac{32}{27}$, mentre in fatti risulta $= +\frac{14}{27}$. Questo errore cambia non poco i risultati ed i precetti che si danno nei seguenti paragrafi fino alla fine dell'articolo.

porci (come s'insegna nel calcolo differenziale) $\frac{dV}{dk} = 0$,
quindi si avrà per determinare k l'equazione

$$-\frac{2(m+2)}{k^3} + \frac{(2m+1)}{k^2} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{a} \right) = 0,$$

donde si ottiene

$$\frac{1}{k} = \frac{2m+1}{2(m+2)} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{a} \right) \dots (1)$$

Sostituendo nel valore di V il trovato valore di $\frac{1}{k}$, si
otterrà nel caso del minimo

$$V = -\frac{m\alpha^2 x^2}{2(m-1)p} \left\{ m \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha a} + \frac{1}{a^2} \right) - \frac{(2m+1)}{4(m+2)} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{a} \right)^2 \right\}$$

Ora essendo $\frac{1}{p} = \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha}$, sarà $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{2}{a\alpha}$,

donde facilmente si vede che $\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{a} \right)^2 = \frac{1}{p^2} - \frac{4}{a\alpha}$ ed

$\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{a\alpha} + \frac{1}{a^2} = \frac{1}{p^2} - \frac{3}{a\alpha}$. Introdotti questi valori nell'equazione precedente, con facili riduzioni si ottiene la minima aberrazione dalla seguente

$$V = -\frac{m(4m-1)}{8(m+2)(m-1)} \frac{\alpha^2 x^2}{p} \left(\frac{1}{p^2} + \frac{4(m-1)}{4m-1} \frac{1}{a\alpha} \right) (2)$$

essendo il valore di k ad essa corrispondente determinato dalla superiore equazione (1).

101. *Coroll. I.* Per un oggetto infinitamente lontano si ha $\alpha = p$,

$$\frac{1}{k} = \frac{2m+1}{2(m+2)} \frac{1}{p}; \quad V = -\frac{m(4m-1)}{8(m+2)(m-1)} \frac{x^2}{p}.$$

102. *Coroll. II.* Poichè si ha

$$\frac{m-1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{m}{k}; \quad \frac{m-1}{r'} = \frac{1}{\alpha} - \frac{m}{k};$$

sostituendo il valore di $\frac{1}{k}$ dato dall'equazione (1), e moltiplicando per $2(m+2)$ si avranno i raggi delle due superficie della lente sottoposta alla minima aberrazione dalle

due seguenti equazioni

$$\frac{2(m-1)(m+2)}{r} = \frac{m(2m+1)}{a} - \frac{2m'-m-4}{a} \quad (3)$$

$$\frac{2(m-1)(m+1)}{r'} = \frac{m(2m+1)}{a} - \frac{2m'-m-4}{a} \quad (4)$$

Dividendo una per l'altra queste due equazioni, si ottiene

$$\frac{r}{r'} = \frac{m(2m+1)a - (2m'-m-4)a}{m(2m+1)a - (2m'-m-4)a},$$

la quale posto $a = \infty$ si cangia nella seguente

$$\frac{r}{r'} = \frac{4+m-2m'}{m(2m+1)}; \text{ e se si fa } m = \frac{3}{2} \text{ si troverà}$$

$\frac{r}{r'} = \frac{1}{6}$. Quindi nel caso della minima aberrazione il raggio della superficie anteriore di una lente deve stare al raggio della superficie posteriore :: 1 : 6.

103. *Scolio.* La semplicità con cui siamo pervenuti ad esprimere il valore di V nel caso del minimo fa desiderare che si possa generalmente dare a V una forma più comoda. Ora è facile vedere che se generalmente ponghiamo

$$V = -\frac{m(4m-1)\alpha'x'}{8(m-1)'(m+2)p} \left(\frac{\lambda}{p'} + \frac{4(m-1)'}{4m-1} \frac{1}{\alpha a} \right)$$

si otterrà il minimo valore di V ponendo $\lambda = 1$, e per gli altri si avrà l'aberrazione longitudinale dando a λ un valore conveniente maggiore dell'unità. Uguagliando ora l'assunto valore di V con quello del § 99, avremo per determinare λ l'equazione

$$4m(m+2) \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha\alpha'} + \frac{1}{\alpha'} \right) - \frac{4(m+2)(2m+1)}{k} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{a} \right) + \frac{4(m+2)'}{k'} = \frac{(4m-1)\lambda}{p'} + \frac{4(m-1)'}{\alpha a},$$

la quale manifestamente equivale alla seguente

$$\begin{aligned} \frac{4(m+2)^2}{k^2} - \frac{4(m+2)(2m+1)}{k} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a} \right) + (2m+1)^2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a} \right)^2 \\ = (2m+1)^2 \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a} \right)^2 - 4m(m+2) \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} \right) \\ + \frac{(4m-1)\lambda}{p^2} + \frac{4(m-1)}{a^2 a}. \end{aligned}$$

Fatte le convenienti riduzioni, il secondo membro di questa equazione diviene

$$= (4m-1) \left\{ \frac{\lambda}{p^2} - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a} \right)^2 \right\} = \frac{(4m-1)(\lambda-1)}{p^2}.$$

Estraendo quindi da ambe le parti la radice quadrata si ottiene fra λ e k la seguente relazione

$$\frac{2(m+2)}{k} = (2m+1) \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a} \right) \pm \frac{\sqrt{(4m-1)(\lambda-1)}}{p} \quad (5)$$

dalla quale chiaramente deducesi non potere λ giammai divenire negativo, nè minore di uno.

104. PROPOS. III. *Esporre i valori di k , r , r' , V dati per λ .*

L'equazione superiore (5) darà il valore di k per l'indeterminata λ . In seguito le due equazioni

$\frac{m-1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{m}{k}$; $\frac{m-1}{r'} = \frac{1}{a} - \frac{m}{k}$ moltiplicate per il fattore $2(m+2)$ daranno, eliminando k ,

$$\frac{2(m+2)(m-1)}{r} = \frac{4+m-2m^2}{a} + \frac{m(2m+1)}{a} \pm \frac{m\sqrt{(4m-1)(\lambda-1)}}{p}$$

$$\frac{2(m+2)(m-1)}{r'} = \frac{4+m-2m^2}{a} + \frac{m(2m+1)}{a} \mp \frac{m\sqrt{(4m-1)(\lambda-1)}}{p}$$

per ultimo si avrà V dall'equazione

$$V = - \frac{m(4m-1)}{8(m-1)^2(m+2)} \frac{a^2 x^2}{p^2} \left(\frac{\lambda}{p^2} + \frac{4(m-1)}{4m-1} \frac{1}{a^2 a} \right).$$

Pongasi per brevità

$$\mu = \frac{m(4m-1)}{8(m-1)^2(m+2)}; \quad \nu = \frac{4(m-1)}{4m-1}$$

$$\rho = \frac{4+m-2m^2}{2(m+2)(m-1)}; \quad \varphi = \frac{m(2m+1)}{2(m-1)(m+2)}$$

$$\tau = \frac{m \sqrt{\frac{1}{2} m - 1}}{2(m+2)(m-1)}.$$

e si avrà $V = -\frac{\mu \alpha' x'}{p} \left(\frac{\lambda}{p'} + \frac{v}{\alpha a} \right) \dots (6)$

$$\frac{1}{r} = \frac{\rho}{a} + \frac{\sigma}{\alpha} \pm \frac{\tau \sqrt{\lambda - 1}}{p} \dots (7)$$

$$\frac{1}{r'} = \frac{\rho}{a} + \frac{\sigma}{\alpha} \mp \frac{\tau \sqrt{\lambda - 1}}{p} \dots (8)$$

105. *Coroll. I.* Se nelle equazioni (7), (8) si pone in luogo di $\frac{1}{a}$ il suo valore $\frac{1}{p} - \frac{1}{a}$, ed inoltre per brevità si fa $h = \frac{p}{a}$ si otterranno i valori di r, r' così espressi

$$r = \frac{p}{\sigma - h(\sigma - \rho) \pm \tau \sqrt{\lambda - 1}}; \quad r' = \frac{p}{\rho + h(\sigma - \rho) \mp \tau \sqrt{\lambda - 1}}$$

dove se $a = \infty$, sarà $h = 0$.

106. *Coroll. II.* Per una lente isoscele dovrà essere $r = r'$; lo che darà

$$\sqrt{\lambda - 1} = \frac{\sigma - \rho}{\tau} \left(\frac{1}{2} - h \right) = \frac{\sigma - \rho}{2\tau} \frac{a - \alpha}{a + \alpha}; \text{ e nel ca-}$$

so di $a = \infty$, avremo $\sqrt{\lambda - 1} = \frac{\sigma - \rho}{2\tau}$.

*Applicazione delle formole precedenti
ad alcuni casi particolari.*

107. Per vedere più chiaramente i rapporti delle aberrazioni per la figura sferica crediamo opportuno di qui riunirne i valori nelle lenti le più usitate, ponendo

$m = \frac{31}{20} = 1,55$, numero molto prossimo al vero nelle comuni paste di vetro per i raggi di media rifrangibilità, e fingeremo $a = \infty$, cosicchè i raggi entrino paralleli nella prima superficie della lente. Avanti tutto con tavole a 5 cifre si calcolino i costanti $\mu, v, \sigma, \rho, \tau$, e si otterranno in questa ipotesi i seguenti valori

$$\mu = 0,9382; \quad \nu = 0,2327; \quad \rho = 0,1908; \\ \sigma = 1,6274; \quad \tau = 0,9051. \quad \text{Quindi avremo}$$

1.° La minima aberrazione dall'equazione

$$V = -\frac{\mu x^2}{p} = -\frac{0,9382 x^2}{p}, \text{ numero che porremo } = \omega.$$

Ponendo $\lambda = 1$ nelle equazioni (7), (8) ed $a = \infty$, si troverà $r : r' : : \rho : \sigma$, cioè $:: 1 : 8$ circa.

2.° Sia in secondo luogo $r = r'$ cioè la lente isoscele; sarà $\sqrt{\lambda - 1} = \frac{\sigma - \rho}{\tau} = 0,7936$; quindi $\lambda = 1,6298$;

$$V = 1,6298 \omega = -1,5291 \frac{x^2}{p}.$$

3.° Sia $r = \infty$, cioè la lente piana nella sua superficie anteriore; sarà in virtù dell'equazione (7) ponendovi

$$a = \infty; \quad \sqrt{\lambda - 1} = \frac{\sigma}{\tau}, \text{ donde otterrassi } \lambda = 4,2329;$$

$$V = 4,2329 \omega = -3,9711 \frac{x^2}{p}.$$

4.° Sia $r' = \infty$; cioè la lente piana dalla parte dell'immaginc. L'equazione (8) darà a motivo di $a = \infty$

$$\sqrt{\lambda - 1} = \frac{\rho}{\tau}; \text{ quindi } \lambda = 1,0444, \text{ e}$$

$$V = 1,0444 \omega = -0,9798 \frac{x^2}{p}.$$

Si vede di qui che adoperando una lente piano-convessa con la parte convessa rivolta agli oggetti, l'errore della figura supera di una piccolissima quantità il minimo errore; perciò in pratica sarà vantaggioso l'uso di queste lenti.

5.° Sia per ultimo proposto di ricercare l'aberrazione per la figura in una lente di convergenza da una parte convessa, dall'altra concava nell'ipotesi che il raggio della superficie concava stia a quello della superficie convessa $:: 5 : 2$. Sia a principio la superficie concava rivolta verso l'occhio; sarà r' negativo, ed r positivo, ed avremo $\frac{r'}{r} = -\frac{5}{2}$; quindi l'equazione

$$\frac{r'}{r} = \frac{\sigma \pm \tau \sqrt{\lambda - 1}}{\rho \mp \tau \sqrt{\lambda - 1}} = -\frac{5}{2}, \text{ dalla quale si ot-}$$

terrà $\sqrt{\lambda - 1} = \frac{5\rho + 2\sigma}{3\tau}$, e $\lambda = 3,4026$.

Sia in secondo luogo la superficie concava rivolta verso l'oggetto. Si troverà in questo caso

$$\sqrt{\lambda - 1} = \frac{5\sigma + 2\rho}{3\tau}; \quad \lambda = 10,8424.$$

Di qui apparisce essere la prima disposizione sempre alla seconda preferibile; ma sì nell'una che nell'altra essere gli errori dipendenti dalla figura molto maggiori del minimo loro valore. Si dovrà quindi concludere che se gli occhiali da naso convesso-concavi introdotti dal signor Baradelles producono un buon effetto, non è perchè in tale specie di lenti le aberrazioni per la figura siano piccolissime, ma piuttosto perchè moderando la troppo rapida convergenza dei raggi luminosi che cadono verso gli estremi, aumentano il campo della visione, come sopra dicemmo.

108. PROPOS. IV. *Determinare l'aberrazione longitudinale per un sistema di più lenti disposte intorno ad un asse comune (fig. 31).*

1.° Siano a bel principio due lenti situate in A e B sullo stesso asse EG ; sia E il punto radiante, F il punto di riunione dei raggi prossimi all'asse nella prima lente A ; f il punto a cui si dirigono i raggi estremi. Sarà per il § 104 (ritenendo le stesse denominazioni)

$$Ff = -\frac{\mu}{p} \left(\frac{\lambda}{p'} + \frac{v}{a\alpha} \right) \alpha' x', \text{ e ponendo per brevità}$$

$$\frac{\mu}{p} \left(\frac{\lambda}{p'} + \frac{v}{a\alpha} \right) = P, \text{ sarà } Ff = -P \alpha' x'.$$

Supponiamo ora che i raggi di luce prossimi all'asse provenienti da F si riuniscano in G : quelli provenienti da f in γ , e quelli che da f si dirigono alle estremità di B , convergano verso g . Sarà Gg l'intera aberrazione longitudinale corrispondente al sistema di due lenti.

Per ottenerne l'espressione pongasi al solito $FB = b$, $BG = \beta$, la distanza focale della seconda lente $= q$, la

sua apertura = x' ; sarà $x' = \frac{b \alpha}{\alpha}$ (§ 53); l'equazione

$\frac{1}{q} = \frac{1}{b} + \frac{1}{\beta}$ differenziata darà $d\beta = -\frac{\beta}{b} db$, nella quale ponendo $db = Ff$, $d\beta$ si cangerà in γG ; quindi $\gamma G = -\frac{\beta}{b} P \alpha' x'$. Quanto a γg è palese che sarà

l'aberrazione della lente B , assumendo la distanza del punto radiante = b , e si otterrà dal § 104. cangiando α in b , α in β , p in q , x in x' . Se indichiamo con Q una funzione per la lente B simile alla funzione P per la lente A , sarà $\gamma g = -Q \beta' x' = -\frac{Q \beta' b'}{\alpha'} x'$. Dietro ciò avremo

$$Gg = -\beta' x' \left(\frac{\alpha'}{b'} P + \frac{b'}{\alpha'} Q \right) = -\frac{\alpha' \beta'}{b'} x' \left(P + \frac{b'}{\alpha'} Q \right),$$

ove il segno $-$ indica che l'aberrazione longitudinale diminuisce la distanza β .

2.° Siano ora tre lenti nel sistema, e ritenendo le denominazioni usate finora e stabilite al § 51, pongasi

$G\gamma = H\beta' x'$, ed R indichi per la terza lente una funzione simile a P , Q per la prima e seconda lente. Riflettendo che l'apertura della terza lente è $= \frac{b c x}{\alpha \beta}$, si

troverà con un ragionamento simile al precedente

$$\begin{aligned} \text{aberr. longit.} &= -\gamma' x' \left(\frac{\beta'}{c'} H + \frac{b' c'}{\alpha' \beta'} R \right) \\ &= -\gamma' x' \left(\frac{\alpha' \beta'}{b' c'} P + \frac{b' \beta'}{\alpha' c'} Q + \frac{b' c'}{\alpha' \beta'} R \right) \end{aligned}$$

la quale equivale alla seguente

$$\text{aberr. longit.} = -\frac{\alpha' \beta' \gamma'}{b' c'} x' \left(P + \frac{b'}{\alpha'} Q + \frac{b' c'}{\alpha' \beta'} R \right)$$

lo stesso dicasi per un maggiore numero di lenti.

Riunendo ora sotto un sol punto di vista le trovate espressioni, si calcoleranno le aberrazioni longitudinali dietro i seguenti precetti.

$$\text{Pongasi} \dots P = \frac{\mu}{p} \left(\frac{\lambda}{p'} + \frac{v}{a a'} \right)$$

$$Q = \frac{\mu'}{q} \left(\frac{\lambda'}{q'} + \frac{v'}{b \beta'} \right)$$

$$R = \frac{\mu''}{r} \left(\frac{\lambda''}{r'} + \frac{v''}{c \gamma'} \right)$$

$$S = \frac{\mu'''}{s} \left(\frac{\lambda'''}{s'} + \frac{v'''}{d \delta'} \right), \text{ e così di seguito}$$

dove $\mu', \lambda', v'; \mu'', \lambda'', v''$ ec. esprimono per la seconda, terza lente ciò che μ, λ, v significano per la prima. Se le lenti sono composte di una stessa pasta di vetro, saranno μ, v costanti.

Indicando con V la finale aberrazione longitudinale, ne avremo il valore dalla seguente tabella

N.° delle

lenti

Corrispondenti valori di V

$$\text{I.} \quad - a' x' P$$

$$\text{II.} \quad - \frac{a' \beta' x'}{b'} \left(P + \frac{b^4}{a^4} Q \right)$$

$$\text{III.} \quad - \frac{a' \beta' \gamma' x'}{b' c'} \left(P + \frac{b^4}{a^4} Q + \frac{b^4 c^4}{a^4 \beta^4} R \right)$$

$$\text{IV.} \quad - \frac{a' \beta' \gamma' \delta' x'}{b' c' d'} \left(P + \frac{b^4}{a^4} Q + \frac{b^4 c^4}{a^4 \beta^4} R + \frac{b^4 c^4 d^4}{a^4 \beta^4 \gamma^4} S \right)$$

e così degli altri sistemi, palese essendo la legge di queste espressioni.

109. *Coroll. I.* Se nelle precedenti equazioni introducesi l'ingrandimento M del sistema dato per l nel § 66 (l essendo la distanza del punto d'incontro del raggio principale con l'asse dall'immagine prodotta dall'ultima lente) si avrà generalmente

$$V = - M \frac{l' a'}{h'} x' \left(P + \frac{b^4}{a^4} Q + \frac{b^4 c^4}{a^4 \beta^4} R + \dots \right)$$

espressione semplicissima dell'aberrazione longitudinale dipendente dalla figura sferica.

Coroll. II. La condizione che dovrà essere adempita

in un sistema di lenti per togliere l'errore della figura è espressa dalla seguente equazione

$$P + \frac{b^4}{a^4} Q + \frac{b^4 c^4}{a^4 \beta^4} R + \frac{b^4 c^4 d^4}{a^4 \beta^4 \gamma^4} S + \dots = 0.$$

110. Consideriamo ora un sistema di più lenti messe a contatto intorno ad uno stesso asse, e delle quali sia trascurabile la grossezza. Avremo in questo caso le condizioni $a + b = 0$, $\beta + c = 0$, $\gamma + d = 0$ ec.; quindi $b = -a$, $c = -\beta$, $d = -\gamma$ ec. rappresenteranno le distanze successive dei punti radiantì dalla seconda, terza, quarta ec. lente.

Per maggiore semplicità s'introducano i valori reciproci di queste grandezze e delle distanze focali ad imitazione del signor Herschel nella Memoria sopra citata;

pongasi cioè $\frac{1}{a} = D$; $\frac{1}{b} = D'$; $\frac{1}{c} = D''$; $\frac{1}{d} = D'''$ ec.;

inoltre sia $\frac{1}{p} = L$; $\frac{1}{q} = L'$; $\frac{1}{r} = L''$; $\frac{1}{s} = L'''$

dove le quantità L, L', L'', L''' saranno ciò che il lodato autore chiama *forza o potere della lente*.

Le equazioni

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a}; \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{b} + \frac{1}{\beta}; \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{c} + \frac{1}{\gamma}$$

divenendo

$$L = D - D'; \quad L' = D' - D''; \quad L'' = D'' - D''',$$

daranno

$$D' = -(L - D); \quad D'' = -(L + L' - D);$$

$$D''' = -(L + L' + L'' - D),$$

e così di seguito; vedesi anche facilmente che $L + L' + L''$ sarà la forza della lente composta, ossia la distanza reciproca del punto di riunione dei raggi paralleli dalla superficie posteriore dell'ultima lente.

Ciò premesso, l'espressione di V a motivo di $b = -a$, $c = -\beta$ darà

per un sistema di 2. lenti $V = -\beta^2 x^2 (P + Q)$

3. lenti $V = -\gamma^2 x^2 (P + Q + R)$

4. lenti $V = -\delta^2 x^2 (P + Q + R + S).$

I valori di P, Q, R si potranno facilmente esprimere eziandio in funzione dei raggi delle superficie delle

lenti. In fatti trovammo per una sola lente

$$V = -a' x' P = -\frac{m' a' x'}{2p} \left(A + \frac{B}{a} + \frac{C}{a'} \right) \quad (\S 98);$$

quindi facendo uso delle superiori denominazioni risulta

$$P = \frac{m'}{2} L (A + B D + C D').$$

Sarà del pari $Q = \frac{m'}{2} L' (A' + B' D' + C' D'')$, e così

degli altri, dove A, B, C, A', B', C' esprimono funzioni dei raggi, e dell'indice di rifrazione determinate al citato paragrafo. Di qui apparisce come si possano avere le aberrazioni longitudinali espresse direttamente per i raggi delle superficie delle lenti, lo che riesce di molto comodo per determinarne in dati sistemi il valore senza l'intervento di numeri ausiliarij.

111. Prendiamo ad esempio un sistema di due lenti, e pongasi $\frac{1}{r} = a$; $\frac{1}{r'} = b$; $\frac{1}{r''} = a'$; $\frac{1}{r'''} = b'$ (le quantità a, b, a', b' sono dal signor Herschel chiamate curvature delle superficie corrispondenti delle lenti). Avremo, assumendo $m = \frac{3}{2}$ (§ 98)

$$A = \frac{1}{27} (7a' + 6ab + 27b'); \quad B = \frac{1}{27} (14a - 66b); \quad C = \frac{52}{27}$$

$$A' = \frac{1}{27} (7a' + 6a'b' + 27b''); \quad B' = \frac{1}{27} (14a' - 66b'); \quad C' = \frac{52}{27}$$

col mezzo dei quali valori si otterranno quelli di P e di Q , e quindi V .

Supponiamo per un caso particolare $D = 0$, ovvero che i raggi entrino paralleli nella prima lente. Sarà

$$D' = -L; \quad \beta = \frac{1}{L + L'}; \quad \text{quindi risulterà}$$

$$V = \frac{-x'}{24(L + L')} \left\{ \begin{array}{l} L(7a' + 6ab + 27b') \\ + L'(7a' + 6a'b' + 27b'') \\ - LL'(14a' - 66b') + 52L'L' \end{array} \right\}$$

Se pongasi $a = 2Lh$, $a' = 2L'h'$, dalle equazioni

$$\frac{1}{p} = \frac{m-1}{r} + \frac{m-1}{r'}; \quad \frac{1}{q} = \frac{m-1}{r''} + \frac{m-1}{r'''} \quad \text{nel caso}$$

di $m = \frac{3}{2}$, troveremo

$$\frac{1}{f} = 2 L (1 - h) = b; \quad \frac{1}{f'} = 2 L' (1 - h') = b'.$$

Introducendo questi valori nella precedente espressione di V , ed inoltre ponendo $y = \frac{L'}{L}$, ed

$$V = (28 h'^2 - 48 h' + 27) y^2 + (33 - 40 h') y' + 13 y' + 28 h' - 48 h + 27$$

si cangerà nella seguente $V = - \frac{x'(L + L')}{6} \frac{Y}{(1 + y)^3}$.

Chiamando ω la minima aberrazione di una lente isolata, la cui forza sia $= L + L'$, nel caso di $m = \frac{3}{2}$, e dei raggi paralleli si avrà dall'equazione (2) § 100

$$\omega = - \frac{15}{14} x' (L + L'); \text{ quindi}$$

$$V = \frac{7}{45} \frac{Y}{(1 + y)^3} \omega \quad \dots \quad (9)$$

che serve a confrontare le aberrazioni di una lente composta con quelle di una sola lente della migliore forma. Apparece al tempo stesso essere ottima quella combinazione, in cui conservando $L + L'$ un valore considerabile, la funzione $\frac{Y}{(1 + y)^3}$ diviene $= 0$, o se ciò non fosse possibile acquista il suo minimo valore.

Per darne un esempio pongasi $a = 0$, $b' = 0$, donde si otterrà $h = 0$, $h' = 1$. In tal caso il sistema sarà composto di due lenti aventi la prima ed ultima superficie piana. La condizione $V = 0$ darà l'equazione

$$Y = 7 y^3 - 7 y^2 + 13 y + 27 = 0,$$

la quale ha per radici $y = -1$, $y = \frac{7 \pm \sqrt{-140}}{7}$; le

due ultime radici essendo immaginarie annunziano un sistema impossibile. La prima darà $L' = -L$, e quindi $L' + L = 0$, combinazione inutile poichè presta l'ufficio di un vetro piano a facce parallele.

Non potendosi in questo sistema ridurre $V = 0$, cer-

chisi il suo minimo valore; allontanando il fattore inutile $y + 1$, si troverà l'equazione del minimo per la funzione $\frac{Y}{(1+y)^3}$ espressa da $28y - 68 = 0$, la quale dà

$$y = 2\frac{3}{7} = 2,429; \text{ quindi } L' = 2,429 L, \text{ ed}$$

$L' + L = 3,429 L$. Si troverà poi dall'equazione (9)

$$\frac{V}{\omega} = \frac{49}{108} = 0,454, \text{ donde apparisce che in questa dispo-$$

sizione l'errore della figura è circa la metà di quello di una lente semplice della migliore forma, e della stessa distanza focale. Se si volessero le dimensioni delle lenti per comporre il sistema, si otterrebbero facilmente nel modo

seguente. Fingasi $L + L' = 1$; sarà $L = \frac{1}{3,429}$, perciò

$p = 3,429$; la prima superficie rivolta all'oggetto dovrà essere piana; la seconda sferica e convessa avrà per raggio $r' = (m - 1)p = 1,715$. Per la seconda lente si tro-

verà $q = \frac{3,429}{2,429} = 1,412$; la superficie rivolta all'occhio

piana, l'altra posta a contatto colla lente precedente sarà sferica di raggio $r'' = 0,706$.

112. Cerchiamo ora generalmente quali dovrebbero essere le curvature delle quattro superficie delle due lenti, affinchè il loro sistema unito avesse la massima forza, e fosse al tempo stesso distrutta l'aberrazione della figura. Qui è palese che sussistendo l'equazione $Y = 0$, dovrebbe essere $L + L'$ un massimo, e riguardando come data una delle due lenti (per es. la prima, senza di che la ricerca è indeterminata), avremo $dL' = 0$, e perciò $dy = 0$. Se ora si differenzia l'equazione $Y = 0$ nell'ipotesi di y costante, e di h, h' variabili, perchè sia distrutta l'aberrazione di figura per le variazioni date ad h ed h' dovranno separatamente annullarsi i coefficienti di dh, dh' ; quindi avremo le due equazioni di condizione

$$(56h' - 48)y - 40 = 0; \quad 56h - 48 = 0,$$

$$\text{le quali danno } h = \frac{6}{7}; \quad h' = \frac{6}{7} + \frac{5}{7y}.$$

Sostituiti questi valori nell'equazione $Y = 0$, essa die-

tro le opportune riduzioni si cangia nella seguente

$$y^3 - 0,2 y^2 - 0,2 y + 1 = 0.$$

le cui radici sono $y = -1$; $y = 0,6 \pm 0,8 \sqrt{-1}$. Le ultime due essendo immaginarie si riferiscono ad una combinazione impossibile; la prima corrispondendo ad

$L' + L = 0$ dà una disposizione inutile facendo l'ufficio di un vetro piano a facce parallele. Questi risultati sono contrarij a quelli del signor Herschel nel § 12 della citata Memoria, dove trova la ricerca possibile, ed assegna le dimensioni delle lenti; la differenza traendo origine dall'errore numerico del coefficiente β citato sopra nella nota al § 98.

Dell' aberrazione laterale, e del minimo circolo di aberrazione.

113. Sia (fig. 32) PP una lente; E un punto radiante situato sul suo asse; F il punto di riunione di E per i raggi prossimi all' asse; EP l'ultimo raggio che dal punto E cade sulla lente in una distanza $AP = x$, il quale per l'errore della figura sferica vada ad incontrare l'asse in f ; sarà Ff l'aberrazione longitudinale della figura sferica, che porremo $= Ux^3$. Se per il punto F s'innalza una perpendicolare FK , e si prolunga fino ad incontrare il raggio estremo EPf , passeranno entro FK tutti i raggi che da E cadono lungo AP ; e descritto un circolo con raggio FK , entro questo circolo passeranno tutti i raggi che dal punto E si rivolgono alla lente PP .

Ciò posto, FK chiamasi *aberrazione laterale per la figura*.

$$\text{È palese che sarà } FK = Ff \text{ tang. } f = Ux^3 \frac{x}{Af} = \frac{Ux^3}{AF},$$

ponendo cioè $\frac{1}{Af} = \frac{1}{AF}$ in grazia del piccolissimo fattore x^3 per cui è moltiplicata la frazione; e ponendo generalmente $\text{tang. } f = f = Hx$, sarà l'aberrazione laterale $FK = HUx^3$.

Se sarà PP l'ultima lente di un sistema disposto intorno ad un medesimo asse, Ux^3 rappresenterà l'aberrazione totale in longitudine del sistema medesimo, ed Hx

l'angolo sotto del quale i raggi estremi tagliano l'asse. Quindi avremo

$$U = - \frac{M' l' a'}{h'} \left(P + \frac{b'}{a'} Q + \frac{b' c'}{a' \beta'} R + \dots \right) \quad (\S 109)$$

$$H = \frac{b c d \dots}{a \beta \gamma \delta \dots} \quad \text{per il } \S 52 = \frac{h}{a} \frac{1}{l M} \quad (\S 66)$$

Si otterrà da ciò

$$FK = \frac{M a l}{h} x^3 \left(P + \frac{b'}{a'} Q + \frac{b' c'}{a' \beta'} R \dots \right) \quad (10),$$

nel secondo fattore dovendosi prendere tanti termini quante sono le lenti.

114. Sia ora EN un raggio che incontri la lente PP nel prolungamento di AP in una distanza $AN = z$, che rivolgasi al punto Z dell'asse, ed incontri il raggio Pf prolungato in un punto II , da cui si abbassi HI perpendicolare sopra Ff . È palese che sarà $HI = 0$, se sia $AN = AP = x$; sarà del pari $= 0$, se sia $z = 0$; quindi fra $z = 0$, e $z = x$ riceverà HI un valore massimo. Ciò posto cerchisi 1.^o per qualunque valore di z la grandezza e posizione di HI sulla retta Ff ; 2.^o il suo massimo valore.

Ritenendo le denominazioni del § precedente si avrà $fF = Ux'$, e per analogia $FZ = Uz'$, donde $fZ = U(x' - z')$. Ora essendo l'angolo in f , o piuttosto la sua tangente $= Hx$, sarà del pari l'angolo in $Z = Hz$; quindi risulterà dai due triangoli rettangoli fIH , ZIH l'equazione

$$HI = fI \cdot Hx = ZI \cdot Hz = H(fZ - fI)z,$$

dalla quale deducesi (dividendo per HI)

$$fI(x + z) = z fZ \cdot z = U(x' - z')z,$$

cioè $fI = U(x - z)z$. Sostituendo nel valore di HI questo di fI sarà $HI = HU(x - z)z$; ricercando il suo massimo valore coi precetti del calcolo differenziale, si avrà per il caso del massimo $z = \frac{x}{2}$, e perciò il mas-

simo valore di $HI = \frac{HUx^3}{4}$, pel qual caso sarà

$$fI = \frac{1}{4} fF = \frac{1}{4} Ux', \quad \text{ed} \quad IF = \frac{3}{4} Ux'.$$

115. Se con un raggio $HI = \frac{1}{4} FK$ si descriva un circolo, il cui centro sia in I a $\frac{3}{4}$ di Ff dal punto F , passeranno evidentemente per entro questo circolo tutti i raggi che entrano per la lente PP , e si potranno riguardare come da esso emanati, in quanto che si considerano dotati della medesima rifrangibilità, che supporremo quella corrispondente ai raggi medj. Questo circolo chiamasi *circolo d'aberrazione*, il cui raggio misurasi per l'angolo sotto cui presentasi dal luogo dell'occhio, il quale si può considerare in una distanza da $I = l$. In questa ipotesi il raggio del circolo di aberrazione sarà $= \frac{HI}{l} = \frac{HUx}{4l}$
 $= \frac{M a x^3}{4h} \left(P + \frac{b^4}{a^4} Q + \frac{b^4 c^4}{a^4 \beta^4} R + \frac{b^4 c^4 d^4}{a^4 \beta^4 \gamma^4} S \dots \right)$ (11)
 indicando per $P, Q, R, S \dots$ le funzioni definite al § 108.

Vedesi ora evidentemente che se anche i raggi sortano paralleli dall'ultima lente, nel qual caso sarebbe $l = \infty$, la condizione per togliere l'errore di sfericità è espressa dall'equazione $\dots P + \frac{b^4}{a^4} Q + \frac{b^4 c^4}{a^4 \beta^4} R + \dots = 0$ come abbiamo indicato al § 109.

116. Siamo ora in istato di potere confrontare l'aberrazione di sfericità con quella di rifrangibilità, e dimostrare essere quella di questa di gran lunga minore. Supponiamo per semplicità il punto radiante ad una distanza infinita, e consideriamo il caso di una sola lente. La minima aberrazione longitudinale di sfericità (essendo $m = 1,55$) è (§ 107) $= 0,938 \frac{x'}{p}$, ed il raggio di aberrazione sarà in conseguenza $= 0,2345 \frac{x'}{p'}$. Il raggio di aberrazione dipendente dalla diversa rifrangibilità è (§ 83) $= \frac{1}{55} x$; chiamando r il primo, ed R il secondo starà
 $r : R :: 0,2345 \frac{x'}{p'} : \frac{1}{55} x$; quindi si avrebbe $r = R$, ponendo

$x = \frac{P}{3,59}$. Abbiamo considerato il caso della minima aberrazione di sfericità; per gli altri casi si avrebbe $r : R :: 0,2345 \lambda x^2 : \frac{P^2}{55}$, dove λ è un numero variabile secondo la figura delle lenti (§ 105); così per le lenti isosceli $\lambda = 1,63$; e perciò nel caso di $r = R$ si dovrebbe avere $x = \frac{P}{4,59}$; ma non si danno giammai, almeno per gli obbiettivi, aperture così grandi.

Nel più volte citato cannocchiale Hugeniano era $x = \frac{3}{2}$ pollici; $p = 360$ poll.; però supponendo la lente obbiettiva isoscele $r = 0,2345 \lambda \frac{x^2}{p^2} = 0,3822 \frac{x^2}{p^2} = 0,00001$ poll.; $R = \frac{x}{55} = 0,02727$, quindi $r : R :: 1 : 2727$.

Sebbene l'aberrazione di sfericità sia molto minore di quella dipendente dalla diversa rifrangibilità dei colori, la confusione prodotta nelle immagini degli oggetti è tuttavia per quella parte più da temersi che per questa, come primo di tutti dimostrò il signor Beguelin nelle sue interessanti ricerche sul perfezionamento dei cannocchiali (*Histoire de l'Academie royale des sciences etc. de Berlin an. 1763*). In fatti in un obbiettivo in cui sia distrutta l'aberrazione di figura, i raggi medj più forti e splendenti emanati da un punto unico si riuniscono pure in un sol punto, ed ivi dipingono un'immagine netta e precisa, vicino alla quale vengono a collocarsi altre immagini dello stesso punto meno vivaci prodotte dalla diversa rifrangibilità degli altri colori, le quali fanno l'ufficio di una leggera nebbia, attraverso alla quale l'animo nostro percepisce l'immagine principale come più risplendente. Ma in un obbiettivo in cui sia distrutta l'aberrazione di rifrangibilità, e sussista l'aberrazione di figura, i raggi emanati da un punto vengono distribuiti sulla superficie di un piccolo circoletto, ciaschedun punto del quale può riguardarsi per un'immagine uguale del punto radiante, e quindi l'animo nostro non avendo alcun termine di confronto per

applicarsi ad una piuttosto che ad un'altra di esse, le riceve tutte al tempo stesso; non percepisce idea dell'unità dell'oggetto, e quindi la visione diviene confusa. Dietro queste considerazioni apparisce, che le aberrazioni di sfericità non nuoceranno alla distinta visione in uno strumento diottrico, se il circolo d'aberrazione possa riguardarsi per lo stato dell'occhio come un punto, e quindi se l'angolo sotto il quale si presenta sia il più piccolo che da questo delicato organo si può percepire. Variano gli scrittori di ottica intorno alla stima del diametro apparente insensibile, convenendo che sia più grande per un oggetto opaco, che per un oggetto luminoso, ed estendesi l'incertezza da $2''\frac{1}{4}$ fino ad un minuto. Il signor Beguelin l'assume $= 3''\frac{1}{2}$, ed in generale lo rappresenteremo per 2ϕ , e cercheremo ad esempio la misura dell'aberrazione longitudinale di sfericità in un cannocchiale composto di una lente obbiettiva e di un oculare per giudicare fino a qual punto gli errori di figura possano divenire sensibili.

L'equazione (11) darà (ponendo per i cannocchiali $a = h$, ed osservando che $\alpha = p$, $b = q$)

$\text{sen. } \phi = \frac{Mx^3}{4} P + \frac{Mq^3}{4p^3} Qx^3$. Ora si ha $M = \frac{p}{q}$; quindi l'equazione precedente si cangerà in

$$\text{sen. } \phi = \frac{MPx^3}{4} + \frac{x^3}{4M^3} Q.$$

Nei forti ingrandimenti il termine $\frac{Qx^3}{4M^3}$ diviene piccolissimo e trascurabile; d'altronde in una sola lente l'aberrazione di figura V è rappresentata da
 $-\alpha'x'P = -p'x'P$. Dividendo una per l'altra queste due equazioni, si ottiene $V = \frac{4p'}{Mx}$ $\text{sen. } \phi = \frac{4pq}{x} \text{sen. } \phi$.

Nella tavola di Huyghen riferita al § 90 si ha $\frac{q}{x} = \frac{33}{15}$; ed in quella di Mayer $= \frac{58}{15}$ circa. Si troverà perciò nella prima ipotesi $V = 8,8 \text{ sen. } \phi$; e nella seconda $V = 15,5 \text{ sen. } \phi$; e ponendo $2\phi = 3''\frac{1}{2}$, si troverà

$$V = 0,0000747 p$$

$$V = 0,0001315 p.$$

Da ciò possiamo concludere che gli errori di figura si devono attenuare quanto è possibile, perchè non esercitino negli stromenti ottici una perniciosa influenza.

Scolio. Abbiamo supposto in tutte le cose precedenti il punto radiante nell'asse delle lenti, converrebbe ora considerare gli errori di sfericità per i punti situati fuori dell'asse; in questo caso però si cade in calcoli sommamente complicati dai quali non si è potuto trarre alcuna utile regola per la pratica. Fortunatamente le aberrazioni da ciò risultanti sono così piccole, che la confusione prodotta nella visione per questo motivo, quando sieno tolti gli errori di rifrangibilità, e della figura per i punti situati nell'asse, è impercettibile, sopra tutto se le aperture dei vetri non sieno troppo grandi, e se si faccia nei tubi un uso opportuno di diaframmi per allontanare i raggi troppo laterali che turberebbero la visione. Noi per tanto abbandoneremo queste ricerche, che divengono in pratica piuttosto di pura curiosità, rimandando i nostri leggitori per esse al terzo volume degli Opuscoli matematici del signor d'Alembart.

CAPITOLO VI.

Della costruzione degli obbiettivi acromatici per uso dei cannocchiali.

117. **A**bbiamo nei due precedenti Capitoli diffusamente trattato delle aberrazioni derivate negli stromenti ottici dalla diversa rifrangibilità dei colori e dalla figura sferica dei vetri, ed anche abbiamo mostrato come nuocano alla chiarezza e precisione delle immagini queste aberrazioni. L'ordine naturale richiede che passiamo ad esporre i rimedj che in pratica vi si possono opporre, e cominceremo dai cannocchiali, al perfezionamento dei quali va strettamente congiunto quello dell'Astronomia. Nei seguenti Capitoli daremo la descrizione delle diverse specie di cannocchiali, e della disposizione da darsi alle lenti per la chiara e distinta visione degli oggetti lontani; frattanto

rammentino i nostri lettori, che questi stromenti si compongono essenzialmente di un sistema di lenti unite insieme intorno ad un asse comune in un lungo tubo, le quali si possono riguardare a maggiore semplicità come divise in due separati sistemi; uno dei quali formato dalle lenti di maggiore apertura e di maggiore distanza focale situato all'estremità anteriore del detto tubo viene appellato *obbiiettivo* od *oggettivo*; l'altro composto di una o più minori lenti di corto foco e di poca apertura situato dalla parte opposta costituisce il sistema degli *oculari*, così detti perchè ad esse si approssima l'occhio per vedere le immagini.

È ufficio dell'oggettivo di dipingere nel foco comune delle lenti da cui è formato l'immagine degli oggetti lontani, come una sola lente fissata sull'apertura di una finestra della camera oscura dipinge le immagini degli oggetti esterni sopra una carta posta al suo foco, laddove le lenti oculari servono ad osservarle ed amplificarle prestando all'incirca lo stesso ufficio di una sola lente nella contemplazione dei minuti oggetti e caratteri. Dietro questa semplice esposizione è facile comprendere che tanto più distinta e precisa sarà la visione, quanto più chiare e distinte saranno le immagini prodotte dall'obbiiettivo; imperciocchè la confusione derivante dagli oculari per la diversa rifrangibilità dei raggi sarà per la loro piccola apertura e piccola distanza focale molto tenue e tollerabile all'occhio, che in virtù della sua costruzione non richiede l'ultima precisione per la chiara visione. Ora abbiamo dimostrato che aumentando l'apertura dell'obbiiettivo, aumentano nelle lenti semplici gli errori dipendenti dalla rifrangibilità e dalla figura sferica dei vetri; e d'altra parte se soverchiamente diminuiscono, il cannocchiale diventa oscuro per la piccolezza a cui riducesi il fascio luminoso emesso dall'oculare. Volendo poi congiungere la chiarezza con una forte amplificazione, si cade in distanze focali grandissime, ed in conseguenza in tubi pesanti e difficili a maneggiarsi (§ 90). È quindi sommamente utile di potere combinare in un obbiiettivo una distanza focale mediocre con una grande apertura, e colla chiarezza e precisione delle immagini. Affinchè poi le immagini risultino precise e distinte è palese che i raggi di luce procedenti da un

punto dell'oggetto devono riunirsi esattamente in un punto di qualunque natura essi sieno, ed in qualunque distanza cadano dall'asse della lente, o se ciò non si possa ottenere esattamente, converrà almeno che si riuniscano più che sia possibile in punti vicini. Dovranno quindi con una opportuna combinazione di lenti costruite se sia duopo con diverse paste di vetri annullarsi negli oggettivi acromatici le espressioni delle aberrazioni longitudinali tanto dipendenti dalla diversa rifrangibilità dei colori, quanto dalla figura sferica per i raggi paralleli all'asse, e perchè le immagini sieno prive di contorni colorati dovranno pure essere verificate le condizioni esposte dai §§ 91-93.

Newton, dopo la insigne scoperta della diversa rifrangibilità dei colori, asserì che la dispersione nelle sostanze diafane era proporzionale alla loro forza rifrattiva, indotto a questa erronea sentenza da un fallace esperimento, e concluse quindi non essere possibile rimediare alla confusione delle immagini che ne deriva. Eulero il primo verso il 1747 cominciò a sospettare che combinando insieme diverse sostanze diafane si potesse giungere a togliere gli effetti della dispersione dei colori senza togliere per intero la rifrazione; ma egli pure cadde in errore, come dimostrò l'acutissimo Clairaut. Finalmente Klingenstierna, geometra svezze, e Dollond celebre fisico ed ottico inglese, mostrarono insussistente ed erroneo l'esperimento del Newton, e quest'ultimo giunse a combinare insieme tre prismi formati di due paste diverse di vetro appellate dagl'Inglesi *crown* e *flint* in maniera che gli oggetti veduti attraverso di essi comparivano spostati dal loro luogo, e scevri di colori nei contorni, donde apertamente risultò che la dispersione non è proporzionale alla rifrazione, e rimase provata la possibilità di costruire con queste due specie di vetro un buon obbiettivo acromatico per uso dei canuocchiali.

Resa pubblica questa scoperta del Dollond, i principali matematici allora viventi Clairaut, d'Alambert, Eulero, Boschovich si occuparono della ricerca dei precetti per costruire obbiettivi acromatici scevri da ogni confusione, e lo stesso Dollond giunse a farne con due e tre lenti che producevano un ottimo effetto.

Il celebre Eulero, che aveva con i suoi scritti dato il

primo impulso a questa scoperta, trattò diffusamente in molte Memorie inserite negli Atti delle Accademie di Pietroburgo e di Berlino dei difetti e dei pregi degli stromenti ottici, ed infine nel 1769 pubblicò la sua *Diottrica*, opera insigne che contiene quanto si può desiderare intorno a questo argomento, e dove alle più generali teorie vanno congiunti i precetti per la pratica, e le dimensioni a lume degli artefici che si devono dare alle lenti per la migliore costruzione dei cannocchiali e microscopj. Un altro egregio lavoro per l'ordine e per la chiarezza non meno che per la profondità è la *Diottrica analitica* di Klügel, professore di matematiche in Helmstadt, stampata in lingua tedesca a Lipsia nel 1778, e le Opere del P. Boschovich pubblicate in Bassano nel 1785 in cinque grossi volumi da noi più volte lodate e ricordate. Questi dotti lavori della teoria furono coronati dal più felice successo nella pratica mercè la solerzia e l'ingegno di artefici sommi, fra i quali sopra tutti si distinsero gl'inglesi Dollond e Ramsden. A bel principio non potevasi ottenere un buon flint per la costruzione degli oggettivi acromatici che dall'Inghilterra; ma ben tosto si cominciò a fabbricarlo eziandio in altre regioni, e con felice successo ne tentò la composizione il riputato ottico veneto Lorenzo Selva nelle fornaci di Murano, si ottenne dalle fabbriche francesi e tedesche. In questi ultimi tempi l'Istituto ottico stabilito dal defunto celebre fisico Fraunhofer presso Monaco aggiunse un nuovo grado di perfezione alla fabbrica del flint, procurandogli un potere diffrattivo e rifrattivo molto maggiore di quello che osservavasi nel flint inglese, e seppe costruirne dei cannocchiali che emularono e sorpassarono quanto di più perfetto in questo genere erasi ottenuto dai più riputati fabbricatori inglesi (1). Troppo ci dovremmo dilungare dal

(1) Quantunque sia oramai conosciuto il modo di fabbricare il flint, e sappiasi che il potere rifrattivo e dispersivo varia colla diversa quantità di piombo o di minio che vi s'introduce, è tuttavia molto difficile ottenerlo in masse omogenee, privo da filamenti, bolle e torticci che rendono irregolari le rifrazioni, e turbano la precisione delle immagini, e le migliori fabbriche avere debbono per tale oggetto dei processi loro proprj non resi di pubblico diritto. Crediamo quindi di far cosa grata a riferire il seguente processo del signor Ca-

nostro proposito se volessimo seguire i diversi tentativi e teorici e pratici, che sono stati fatti per il perfezionamento dei cannocchiali acromatici, quantunque a non molti anni rimonti la loro invenzione. Procureremo di esporre i principj fondamentali della loro teoria nelle cose seguenti, e per procedere con ordine tratteremo prima degli obbiettivi acromatici composti di due lenti tanto trascurando la loro grossezza, quanto mettendola a calcolo; in fine brevemente esporremo la teoria degli obbiettivi a tre lenti, illustrando tutto per la comune intelligenza con opportuni esempi numerici.

*Obbiettivi acromatici di due lenti a contatto,
delle quali trascurasi la grossezza.*

118. PROPOS. I. *Determinare le dimensioni di un obbiettivo composto di due lenti sottilissime poste a contatto, affinchè le immagini degli oggetti lontanissimi sieno perfettamente chiare, o in altri termini, affinchè i raggi di luce provenienti da un punto lontanissimo si riuniscano esattamente in un punto dietro di esso.*

Si ritengano le denominazioni usate nei Capitoli precedenti, cioè sieno per la prima lente a, α, p le distanze di riunione, e la sua distanza focale; per la seconda lente

zalet, che trovasi inserito nel Vol. I. dell'opera *Archives des decouvertes* pag. 450. »Ponesi in un crociuolo della capacità di 12 once di »flint-glass 100 parti di minio puro passato con un cribro di seta; 50 »parti di nitro purificato; una parte di calce purissima e bianchissima; 60 parti di sabbia bianchissima, calcinata, e pestata in un mortajo, in seguito lavata con l'ebullizione dell'acido solforico, ed ancora purificata con l'acido muriatico. Questa mescolanza esposta al fuoco in un fornello di vetro da bottiglie diviene molto liquida. In capo a 36 ore si versa nell'acqua pura, e si fa seccare per ridurla in polvere fina. Bisogna lavarla, e purgarla nello stesso modo prescrito per la sabbia; rifonderla come nella prima volta, gittarla ancora nell'acqua, polverizzarla, e purgarla con gli acidi; in fine rifonderla, e dopo 48 ore ritirarla dal crociuolo, per versarla in una lastra di rame caldissima, sulla quale si fa raffreddare per gradi insensibili. Si ottiene così un vetro puro sempre esente da torticci (filandres), bolle e gelatine, il quale possiede tutte le qualità richieste per fare dei buoni obbiettivi. Se s'impiegano materie ben purgate, e che il crociuolo restando esposto al fuoco tengasi sempre coperto, diviene inutile l'ossido di manganese, e per la stessa ragione anco l'ossido di arsenico ».

sieno le stesse quantità rappresentate da b, β, q . Inoltre sia m l'indice medio di rifrazione per il vetro componente la prima lente; dm la dispersione da esso operata per i raggi estremi, di modo che l'indice di rifrazione per i raggi rossi sia $= m - dm$; e per i violetti $= m + dm$; r il raggio della sua superficie anteriore rivolta verso l'oggetto; r' quello della superficie posteriore; per la seconda lente le stesse quantità sieno indicate con m', dm', R, R' .

Fingendosi gli oggetti lontanissimi rapporto alle dimensioni delle lenti, sarà $a = \infty$, $a = p$; ed essendo per ipotesi le lenti a contatto, sarà $a + b = 0$, cioè $b = -p$; quindi l'equazione fondamentale della diottrica darà per la seconda lente $\frac{1}{q} = \frac{1}{b} + \frac{1}{\beta}$; e nel nostro caso di-

$$\text{verrà} \quad \frac{1}{\beta} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p} \quad (1)$$

Sarà β la distanza a cui si andranno a riunire i raggi paralleli all'asse dopo avere attraversata la seconda lente, e perciò sarà la distanza focale dell'obbiettivo composto.

Affinchè i raggi eterogenei si riuniscano tutti nello stesso punto dovrà annullarsi l'espressione di $d\beta$ data al § 84 esprimente l'aberrazione longitudinale dipendente dalla diversa rifrangibilità dei raggi. Quindi dovrassi avere

$$\text{l'equazione} \quad \frac{dm}{m-1} \frac{1}{p} + \frac{dm'}{m'-1} \frac{1}{q} = 0, \text{ che ponendo}$$

$$\text{per brevità} \quad \frac{dm}{m-1} = \zeta, \quad \frac{dm'}{m'-1} = \zeta' \text{ diverrà}$$

$$\zeta q + \zeta' p = 0 \quad (2)$$

Le equazioni (1), (2) danno tosto

$$p = \frac{\zeta' - \zeta}{\zeta} \beta; \quad q = -\frac{\zeta' - \zeta}{\zeta} \beta.$$

Apparisce di qui che le quantità p, q devono essere di segno contrario, e quindi una delle due lenti deve essere convessa, e l'altra concava. Si supponga p positivo, e quindi la prima lente convessa; dovrà essere $\zeta' > \zeta$, e facendo astrazione dal segno sarà anche $q > p$; perciò la distanza focale della lente concava maggiore di quella della convessa. Di più siccome la forza distrattiva dei vetri dipende dai costanti ζ, ζ' , dovrà farsi la lente con-

cava di quel vetro che ha maggior forza distrattiva; quindi la lente convessa si farà di crown, la concava di flint.

Resta tutt'ora a determinare i raggi delle superficie sferiche che compongono le lenti, e col mezzo di queste nuove indeterminate distruggeremo l'errore proveniente dalla figura sferica. L'aberrazione longitudinale dipendente dalla figura in un sistema di due lenti è (§ 108)

$$= -\frac{\alpha' \beta' x'}{b'} \left(P + \frac{b'}{\alpha'} Q \right). \text{ I raggi remoti dell'asse si}$$

riuniranno in un punto, se sia $P + \frac{b'}{\alpha'} Q = 0$, ovvero (a motivo di $b = -\alpha$) $P + Q = 0$, essendo nel caso di

$$a = \infty, P = \frac{\mu \lambda}{p^3}; Q = \frac{\mu'}{q} \left(\frac{\lambda'}{q'} + \frac{v'}{b \beta} \right) = \frac{\mu'}{q} \left(\frac{\lambda'}{q'} - \frac{v'}{p \beta} \right);$$

con ciò la precedente equazione si cangerà nella seguente

$$\mu \lambda + \frac{\mu' P}{q} \left(\frac{\lambda' p'}{q'} - \frac{v' p}{\beta} \right) = 0, \text{ nella quale } \mu, \mu', v' \text{ so-}$$

no dati per gl'indici di rifrazione m, m' (§ 104); λ, λ' rappresentano due numeri indeterminati, dai quali dipendono i raggi delle lenti; p, q sono dati per β dietro le superiori equazioni. Prendendo pertanto λ a piacere, e ponendo la distanza focale β dell'obbiettivo composto = 1,

$$\text{si avrà tosto } \lambda' = -\frac{\mu \lambda}{\mu' p^3} \frac{q^3}{p} + \frac{v' q^3}{p} \quad (3)$$

Determinati i numeri λ, λ' avremo i raggi r, r', R, R' in virtù delle seguenti equazioni (§ 104)

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} &= \sigma' \pm \frac{\tau \sqrt{\lambda - 1}}{p}; & \frac{1}{r'} &= \frac{\rho}{p} \mp \frac{\tau \sqrt{\lambda - 1}}{p} \\ \frac{1}{R} &= -\frac{\rho'}{p} + \sigma' \pm \frac{\tau' \sqrt{\lambda' - 1}}{q}; & \frac{1}{R'} &= \rho' - \frac{\sigma'}{p} \mp \frac{\tau' \sqrt{\lambda' - 1}}{q} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

119. Prima di passare agli esempj è d'uopo fare alcune considerazioni che devono regolare la nostra scelta intorno al valore di una delle due indeterminate λ, λ' . Primieramente conviene osservare, che essendo tolta l'aberrazione longitudinale per la diversa rifrangibilità dei raggi, tutti i raggi eterogenei attraversando l'obbiettivo composto si riuniscono molto prossimamente in quegli stessi punti nei quali si riuniscono i raggi medj; in secondo

luogo, poichè è tolta l'aberrazione longitudinale per la figura sferica fino al termine dipendente da x' , e l'aberrazione laterale fino al termine dipendente da x^5 (x essendo la semiapertura della prima lente, o il seno dell'angolo d'incidenza), è palese che i risultati ottenuti sono esatti fino alle terze potenze dello stesso seno sviluppato in serie per le potenze dell'arco; che anzi per questa strada seguita anche da Eulero nella sua Diottrica si sarebbe trovata la stessa espressione dell'aberrazione longitudinale dipendente dalla figura sferica. Chiamando pertanto ϕ l'angolo d'incidenza, la data soluzione coincide con aver iscritto $\phi - \frac{1}{2} \phi^3$ in luogo di $\sin \phi$; la quale espressione è esatta dentro le prime quattro cifre decimali quando ϕ non supera 15° . Una tale tenue differenza è impercettibile soprattutto nei minori obbiettivi non destinati a forti ingrandimenti; se poi nei maggiori obbiettivi debba alcun poco diminuirsi, dovrà stabilirsi coll'esperienza. Si dovranno quindi regolare le aperture degli obbiettivi in modo che l'angolo del raggio luminoso coi raggi delle superficie delle lenti non superi questo limite, e quindi la cercata apertura sarà la corda dell'arco di 30° di quel circolo in cui ha luogo tale circostanza. Comunemente si pratica di stimare questa apertura dietro la corda del circolo di minore raggio; ma siccome gli angoli del raggio luminoso coi raggi delle lenti variano fortemente secondo i rapporti dei raggi medesimi, quindi sarà bene esaminare accuratamente la via della molecola luminosa che attraversa l'obbiettivo verso la sua estremità, la qual cosa come ci sarà utile in seguito per vedere fino a qual punto sieno distrutte le aberrazioni di rifrangibilità e di figura, così crediamo opportuno di passare alla risoluzione trigonometrica della seguente.

120. PROPOS. II. *Determinare le circostanze tutte relative al viaggio di un raggio luminoso per un sistema di due lenti, la prima delle quali sia convessa, e la seconda concava, tenendo a calcolo la loro grossezza (fig. 33-34).*

S'immaginino le due lenti PP' , QQ' riunite intorno ad un asse comune, sebbene vedansi separate nelle due figure affinchè le troppe linee in esse condotte non facciano confusione. Dovrà la retta BB' della fig. 34 essere

nel prolungamento della retta AB (fig. 33), ed i punti B, B' coincideranno quando le lenti sono a contatto, o in generale disteranno di una quantità arbitraria, che indicheremo con s .

Siano C, C' i centri delle superficie PAP', PBP' (fig. 33); il raggio luminoso DE parallelo all'asse incontra la prima superficie sotto un angolo d'incidenza $EDL = C = AD$. Per la rifrazione attraverso alla prima superficie rivolgesi al punto O ; giunto in d ripassando nell'aria si rivolga al punto O' . Avanti di pervenire al punto O' , incontri la lente concava (fig. 34) in D (i centri delle di cui superficie sono C'', C''') sotto l'angolo d'incidenza $LD C'' = L' D O'$, ed in virtù della rifrazione per la prima superficie venga diretto al punto O'' ; ma ripassando nell'aria al punto d sotto l'angolo d'incidenza $O'' d C'''$, si allontana dalla perpendicolare $d C'''$ dirigendosi al punto O''' . Si domanda la posizione dei punti d'incontro O, O', O'', O''' , e dei successivi angoli d'incidenza e rifratti. A tale oggetto si stabiliscano le seguenti denominazioni (fig. 33).

$CA = r, C'B = r', AB = v$, l'angolo d'incidenza $EDL = i$, l'angolo rifratto $CDO = l$, l'angolo di seconda incidenza $C'dD = l d O = i'$, l'angolo rifratto $l d O' = l'$. Le distanze cercate $AO = k, BO' = k'$.

Parimente pella lente concava (fig. 34) sia $C''B = R, C'''B' = R', BB' = v'$, l'angolo d'incidenza $C''DL = i''$, l'angolo rifratto $LD O'' = l''$, e intorno al punto d l'angolo $C''' d O'' = i'''$, $C''' D O''' = l'''$, $BO' = k' - s$ (s essendo $= 0$, se la lente concava è a contatto della lente convessa, in generale essendo un numero da stabilirsi a piacere); sia in fine $BO'' = k'', B'O''' = k'''$; l'indice di rifrazione per la prima lente $= m$, per la seconda $= m'$.

Posto ciò, avremo 1.^o nella lente convessa

$$\text{sen } i : \text{sen } l :: m : 1, \text{ quindi } \text{sen } l = \frac{\text{sen } i}{m} \quad . \quad . \quad (1)$$

Nel triangolo CDO sarà $CO = k - r$, l'angolo esterno in $C = i$, l'angolo in $O = i - l$; perciò la proporzione dei lati ai seni degli angoli opposti darà

$$k - r = \frac{r \text{ sen } l}{\text{sen } O} = \frac{r \text{ sen } l}{\text{sen } (i - l)}, \text{ da cui si ottiene}$$

$$k = \frac{2 r \operatorname{sen} \frac{1}{2} i \cos (l - \frac{1}{2} i)}{\operatorname{sen} (i - l)} \quad . \quad . \quad (2)$$

Dal triangolo $C' d O$, in cui si ha $C' O = k + r' - v$, e l'angolo in $C' = l d O - O = i' - i + l$, si otterrà

$$\operatorname{sen} i' = \frac{k + r' - v}{r'} \operatorname{sen} (i - l) \quad . \quad . \quad (3)$$

ed in seguito

$$\operatorname{sen} l d O' = \operatorname{sen} l' = m \operatorname{sen} i' \quad . \quad . \quad (4)$$

Nel triangolo $C' d O'$ si ha $C' O' = k' + r'$, l'angolo $O' = l' - C' = l' - l - (i' - i)$, quindi si avrà

$C' O' = k' + r' = \frac{r' \operatorname{sen} l'}{\operatorname{sen} O'}$, dalla quale si ottiene

$$k' = \frac{2 r' \operatorname{sen} \frac{1}{2} (l' - O') \cos \frac{1}{2} (O' + l')}{\operatorname{sen} O'} \quad (5)$$

2.° Venendo ora alla lente concava, si consideri il triangolo $C'' D O'$ (fig. 34) in cui si ha $C'' O' = k' + R - s$, l'angolo in O' come sopra $= (l' - l) - (i' - i)$, l'angolo $L D C'' = i''$. Troveremo quindi

$$\operatorname{sen} i'' = \frac{k' + R - s}{R} \operatorname{sen} O' \quad . \quad . \quad (6)$$

ed in seguito

$$\operatorname{sen} L' D O'' = \operatorname{sen} l'' = \frac{\operatorname{sen} i''}{m'} \quad . \quad . \quad (7)$$

poi dal triangolo $C'' D O''$ si avrà

$$C'' O'' = k'' + R = \frac{R \operatorname{sen} l''}{\operatorname{sen} O''}, \quad \text{e però}$$

$$B O'' = k'' = \frac{2 R \operatorname{sen} \frac{1}{2} (l'' - O'') \cos \frac{1}{2} (l'' + O'')}{\operatorname{sen} O''} \quad (8)$$

Inoltre i triangoli $C'' D O'$, $C'' D O''$ daranno gli angoli in C'' ed in O'' così espressi $C'' = i'' - O'$, $O'' = l'' - C'' = l'' - i'' + O'$.

Considerando per ultimo la rifrazione del raggio luminoso intorno al punto d , avremo nel triangolo $C''' d O''$, $C''' O'' = R' - k'' + v$, $C''' d O'' = i'''$; dalla solita analogia otterremo

$$\operatorname{sen} i''' = \frac{R' - k'' + v}{R'} \operatorname{sen} O'' \quad . \quad . \quad (9)$$

$$\operatorname{sen} C''' d O'' = \operatorname{sen} l''' = m' \operatorname{sen} i''' \quad . \quad . \quad (10)$$

ed il triangolo $C'' d O''$, in cui $C'' O'' = R' - k''$, darà (osservando che gli angoli acuti in C'' ed in O'' sono espressi da $C'' = O'' - i''$, $O'' = l'' + C'' = l'' - i'' + O''$)

$$R' - k'' = \frac{R' \operatorname{sen} l''}{\operatorname{sen} O''}, \quad \text{ovvero}$$

$$k'' = \frac{2 R' \operatorname{sen} \frac{1}{2} (O'' - l'') \cos \frac{1}{2} (O'' + l'')}{\operatorname{sen} O''}. \quad (11)$$

le quali formule risolvono completamente il proposto problema.

121. *Coroll. I.* Se nelle formule precedenti si cambiano i seni degli angoli $i, i', i'', i''', l, l', l'', l'''$ ec. negli angoli stessi, e se si pongono i loro coseni = 1, si avranno le distanze k, k', k'', k''' degl'incontri successivi del raggio luminoso dalle rispettive superficie refringenti per i raggi molto vicini all'asse. Queste quantità si possono più speditamente determinare col mezzo dell'equazione ge-

nerale (a) (§ 38) $\frac{m}{r} = \frac{m-1}{r} - \frac{1}{a}$, la quale applicata convenientemente alle superficie refringenti del caso presente (delle quali le prime due suppongonsi *convessè*, le ultime due *concave*) darà per la

$$1.^{\text{a}} \text{ superficie} \dots \frac{r}{k} = \frac{m-1}{m}$$

$$2.^{\text{a}} \text{ superficie} \dots \frac{r'}{k'} = \frac{m r'}{k - v} + m - 1$$

$$3.^{\text{a}} \text{ superficie} \dots \frac{R}{k''} = \frac{R}{m' (k - s)} - \frac{m' - 1}{m'}$$

$$4.^{\text{a}} \text{ superficie} \dots \frac{R'}{k'''} = \frac{m' R'}{k'' - v'} - (m' - 1)$$

nelle quali v, v' sono le grossezze delle lenti, s la loro distanza che si porrà = 0, quando sono a contatto.

Palese ora è la via di giudicare se in un obbiettivo duplicato siano distrutti gli errori provenienti dalla rifrangibilità e dalla figura sferica. Si caleolino per le formule di questo numero i valori di k, k', k'', k''' 1.° prendendo per m, m' gl'indici medj di rifrazione del crown e del flint adoperati nella costruzione delle lenti; per m, m' gli stessi indici corrispondenti ai raggi estremi o rossi o violacei; se si giunge allo stesso valore di k''' , sarà tolta l'aberra-

zione longitudinale di rifrangibilità per i raggi paralleli all'asse, e non resterebbe al più che un debole contorno colorato per i raggi situati fuori dell'asse proveniente dalle cause accennate nei §§ 91-93, il quale non può essere distrutto con due sole lenti, ed a cui si può rimediare con una opportuna distribuzione degli oculari.

Per giudicare se sia tolta l'aberrazione di figura, si calcoli colle formule rigorose del § precedente il valore di k'' , prendendo un raggio incidente verso gli estremi dell'obbiettivo, a cui corrisponda un'incidenza per es. di 10° ; se si troverà uguale al valore precedentemente ottenuto per i raggi prossimi all'asse sarà distrutto l'errore di figura.

Qui osserveremo non essere possibile distruggere con lenti sferiche esattamente per tutti i colori l'errore di rifrangibilità, imperciocchè l'equazione (2) (§ 118) dà $\frac{q}{p} = \frac{-\zeta'}{\zeta} = \frac{-(m-1)}{m'-1} \frac{dm'}{dm}$, dove essendo costante il primo membro, dovrebbe esserlo eziandio il secondo per tutti i colori dello spettro solare. Ma fino al presente non si sono ottenute paste di vetri tali che soddisfacciano a questa condizione, e resta tuttavia la speranza che i rapidi e grandi progressi della chimica siano valevoli a superare una tale difficoltà, che apporterebbe un grande perfezionamento agli stromenti ottici.

122. *Coroll. II.* Le formule del § 120 danno con rigore i rapporti del seno della prima incidenza ai successivi seni degli angoli d'incidenza e rifratti nelle superficie seguenti; ma per vedere a quale scelta ci dobbiamo attenere nel determinare i raggi della prima lente, onde ottenere la maggiore apertura senza aumentare la confusione prodotta dall'errore della figura, faremo $m = m'$, e cangeremo i seni degli angoli negli angoli stessi, non ricercandoci qui una somma esattezza. In tale ipotesi troveremo dietro facili riduzioni, chiamando i l'angolo d'incidenza di un raggio luminoso parallelo all'asse nella prima superficie, e trascurando la grossezza delle lenti

$$l = \frac{i}{m}, \quad i' = \frac{r}{r'} i + \frac{m-1}{m} i, \quad l' = \frac{r}{r'} m i + (m-1) i,$$

$$i'' = \frac{r}{R} i + (m-1) \frac{r+r'}{r'} i, \quad l'' = \frac{r}{mR} i + \frac{m-1}{m} \frac{r+r'}{r'} i,$$

$$i''' = \frac{m-1}{m} \left(\frac{r+r'}{r'} i - \frac{r}{R} i \right) - \frac{r}{R'} i,$$

$$l''' = m i''' = \frac{r+r'}{r'} (m-1) i - \frac{r}{R} (m-1) i - \frac{r}{R'} m i,$$

nelle quali equazioni si dovrà procurare di scegliere i raggi r, r', R, R' in modo che nessuno degli angoli $l', l'', \dots, i', i'', \dots$ superi il limite prefisso di 15° .

Sia per es. la prima lente isoscele, cioè $r=r'$, e fin-
gasi $m = \frac{3}{2}$; si avrà $l' = 2i$, $i'' = \left(1 + \frac{r}{R}\right)i$;

$l'' = \left(1 - \frac{r}{2R} - \frac{3r}{2R}\right)i$, donde apparisce che se sarà $R > r$, il maggiore angolo sarà l' , e dovrà prendersi $i = 7^\circ 30'$ per non incontrare angoli al di sopra di 15° .

123. Generalmente parlando nelle consuete disposizioni degli obbiettivi acromatici i raggi della lente concava risultano maggiori del più piccolo raggio della lente convessa; quindi gli angoli i'', l''' che sono i più grandi nella seconda lente risultano minori di i' e di l' ; e perciò l'apertura viene regolata dalle dimensioni della prima lente.

Pongasi $r' = hr$; sarà $\frac{1}{p} = \frac{m-1}{r} \left(1 + \frac{1}{h}\right) = \frac{1}{2r} \frac{h+1}{h}$,

donde risulta $2r = \frac{h+1}{h} p$; chiamando pertanto A l'a-

pertura dell'obbiettivo, i l'angolo d'incidenza dei raggi estremi nella prima lente stabilito in modo che gli altri non superino 15° , avremo $A = 2r \sin i = \frac{h+1}{h} p \sin i$;

ora troviamo (§ 118) $p = \frac{\zeta' - \zeta}{\zeta} \beta$; supponendo quindi dietro l'esperienze di Dollond sul flint e crown inglesi, che $\zeta' : \zeta :: 4 : 3$, ed assumendo $\beta = 1$ avremo

$$A = \frac{h+1}{4h} \sin i \quad . \quad . \quad (a)$$

124. Fra le molte forme che può ricevere la prima

lente nella costruzione degli obbiettivi aeromatici sono soprattutto rimarchevoli le seguenti:

1.° La forma isoscele in cui si ha $r = r'$, e per conseguenza $h = 1$. In questa disposizione si ha $l' = 2 i$, facendo cioè $m = \frac{3}{2}$; quindi la massima apertura della lente corrisponderà ad $i = 7^\circ 30'$. Dietro questi elementi si avrà $A = 0,0652$.

2.° La forma corrispondente alla minima aberrazione di figura nella quale si ha (§ 107)
 $r : r' :: \sigma : \rho :: m(2m + 1) : 4 + m - 2m'$, cioè nell'ipotesi di $m = \frac{3}{2}$, $r' : r :: 6 : 1$. Risulta quindi $h = 6$, $l' < i$, però $i = 15^\circ$, $A = 0,0827$. Questa disposizione è adottata da Eulero in molti esempj della sua Diottrica, e delle sue Memorie.

3.° La forma richiesta dalla condizione che l'angolo l' di emergenza sia uguale alla prima incidenza i . Si avrà così la condizione $1 = \frac{r}{r'} m + m - 1$, da cui risulta

$\frac{r'}{r} = \frac{m}{2 - m} = 3$. Posto pertanto $h = 3$, $i = 15^\circ$, si troverà $A = 0,0863$. Questa forma è raccomandata ed adottata dal signor Klügel in una sua Memoria inserita nel Volume XIII dei Commentarj di Gottinga, di cui qui appresso daremo conto.

4.° Il signor Bohnenberger in alcune sue importanti riflessioni intorno alla Memoria di Klügel precedentemente citata inserite nel Giornale che da esso e dal signor Lindenau pubblicavasi a Tubinga sotto il titolo: *Zeitschrift für Astronomie, und verwandte Wissenschaften* (Vol. I. pag. 385. an. 1816.) adotta la proporzione $r : r' :: 2 : 3$.

Qui abbiamo $h = \frac{3}{2}$; però $i = 10^\circ 0'$, non dovendo l' superare 15° ; quindi $A = 0,0796$. Tale disposizione è quindi meno vantaggiosa, in quanto che risulta l'obbiettivo di minore apertura; offre però degli altri vantaggi, dei quali parleremo in appresso.

5.° Nel Vol. IV. dello stesso Giornale alla pag. 352

vengono riferite le dimensioni di un obbiettivo acromatico calcolate dal signor Fraunhofer, il quale differisce da tutti quelli che avanti di lui venivano costruiti, avendo convessa l'ultima superficie della lente di flint. La lente esterna di crown è convesso-convessa, ma la superficie di maggiore raggio è al di fuori. Giusta le dimensioni ivi riferite si ha molto prossimamente $r : r' :: 5 : 2$; quindi $h = \frac{2}{5}$; perchè l' non superi 15° dovrà prendersi $i = 3^\circ 32'$; e però $A = 0,0539$.

Il chiarissimo Autore dà l'apertura del suo obbiettivo $= \frac{1}{15}$ circa della distanza focale, cioè $= 0,0667$, la quale corrisponderebbe ad un angolo $i = 4^\circ 25'$, ed $l' = 18^\circ 30'$. Del resto questi numeri sono sensibilmente alterati colla forza dispersiva ossia dalla variazione del rapporto $\frac{\zeta'}{\zeta}$, che qui noi supponemmo $= \frac{4}{3}$.

Dalle cose precedenti apparisce che la disposizione del signor Klügel quanto all'apertura è la più vantaggiosa; ma altre circostanze possono persuadere il fabbricatore ad un partito diverso. Passiamo ora ad un qualche esempio.

Esempio I.

125. Giusta le esperienze istituite da Dollond si ha per il crown inglese $m = 1,53$; per il flint $m' = 1,58$; ed inoltre $d m : d m' :: 2 : 3$; quindi $\zeta : \zeta' :: 116 : 159$. Variando sensibilmente questo rapporto nelle diverse specie di vetri, noi supporremo come molto prossima al vero la proporzione $\zeta : \zeta' :: 3 : 4$. Dietro ciò le formule del § 118 danno

$$p = \frac{\zeta' - \zeta}{\zeta} \beta = \frac{1}{4} \beta; \quad q = - \frac{\zeta' - \zeta}{\zeta} \beta = - \frac{1}{3} \beta;$$

$$\frac{q}{p} = - \frac{4}{3}; \quad \text{e fingendo } \beta = 1,000, \text{ sarà } p = 0,250,$$

$q = - 0,333$, cioè la prima lente convessa di crown, e la seconda concava e di flint.

Quanto alla figura, suppongasi la prima isoscele, cioè $r = r'$; sarà $\sqrt{(\lambda - 1)} = \frac{\sigma - \rho}{2\tau}$ (§ 106), e ponendovi $m = 1,53$, si otterrà $\lambda = 1,60006$. Dieto di ciò, il calcolo numerico dell'equazione (3) § 118 darà $\lambda' = 4,4053$, da cui si avrà $\sqrt{(\lambda' - 1)} = 1,8453$.

Per istituire il calcolo delle equazioni (4) conviene prima di tutto calcolare i costanti $\rho, \sigma, \tau, \rho', \sigma', \tau', \nu, \nu'$ dietro le loro espressioni date nel § 104 per $m = 1,53$, $m' = 1,58$. Si troverà

$$\begin{array}{llll} \rho = 0,2267 & . & . & \rho' = 0,1414 \\ \sigma = 1,6601 & . & . & \sigma' = 1,5827 \\ \tau = 0,9252 & . & . & \tau' = 0,8775 \\ \mu = 0,9875 & . & . & \mu' = 0,8724 \\ \nu = 0,2194 & . & . & \nu' = 0,2529. \end{array}$$

Quindi le equazioni (4) daranno $r = r' = 0,265$, $R = -0,260$, $R' = -0,751$. L'apertura sarebbe dietro il § precedente = 0,065; ma l'esperienza prova che può prendersi anche maggiore senza notabile confusione.

Comoda riesce questa costruzione perchè le superficie interne delle due lenti hanno all'incirca uguali raggi, ed in una piccola estensione sono a contatto quasi perfetto. In generale conviene procurare di dare alle lenti concava e convessa raggi molto prossimi all'eguaglianza, o di lasciare fra esse un sensibile spazio, affinchè un piccolo strato di aria fra esse rinchiuso non generi i colori delle lamine sottili scoperti da Newton, i quali nuocerebbero alla bontà dell'obbiettivo.

Esempio II.

126. Il signor Fraunhofer nel luogo citato al § 124 si servì per determinare le dimensioni del suo obbiettivo acromatico di due specie di vetro, nelle quali gl'indici di rifrazione erano i seguenti

Crown per i raggi medj		$m = 1,530000$
per i raggi rossi		$m - d m = 1,521000$
quindi		$d m = 0,009000$

$$\begin{array}{l} \text{Flint per i raggi medj.} \quad . \quad . \quad . \quad m' = 1,634494 \\ \text{per i raggi rossi.} \quad . \quad . \quad m' - d \, m' = 1,616707 \\ \hline d \, m' = 0,017787 \end{array}$$

Si otterrà da questi elementi

$$\begin{array}{ll} \log d \, m = 7,9542425 & \log d \, m' = 8,2501027 \\ \log (m - 1) = 9,7242759 & \log (m' - 1) = 9,8024275 \\ \hline \log \zeta = 8,2299666 & \log \zeta' = 8,4476752 \\ & \log \zeta = 8,2299666 \end{array}$$

$$\log \zeta : \zeta = 0,2177086$$

$$\log \zeta : \zeta' = 9,7822914$$

$$\text{Quindi } \frac{\zeta'}{\zeta} = 1,650833; \quad \frac{\zeta}{\zeta'} = 0,605747.$$

Le distanze focali p, q , ponendo per semplicità $\beta = 1$, saranno date dalle seguenti equazioni (§ 118)

$$p = \frac{\zeta : \zeta' - 1}{\zeta' : \zeta}; \quad q = -\left(\frac{\zeta'}{\zeta} - 1\right)$$

$$\text{dalle quali si avrà } \log\left(\frac{\zeta'}{\zeta} - 1\right) = 9,8134829 = \log -q$$

$$\log \zeta' : \zeta = 0,2177086$$

$$\log p = 9,5957743$$

$$\text{e però } p = 0,394256; \quad q = -0,650853$$

Prima di accingersi al calcolo dei raggi da darsi alle due superficie, qualunque sia l'ipotesi per la quale ci determineremo, conviene calcolare i costanti $\mu, \nu, \sigma, \rho, \tau$; $\mu', \nu', \sigma', \rho', \tau'$ dietro le formule del § 104, dando ad m i valori corrispondenti ai raggi medj sopra riferiti. Otterremo in tal guisa

$$\text{per } m = 1,53000,$$

$$\text{per } m' = 1,634494$$

$$\log \mu = 9,9945449 \quad . \quad . \quad \log \mu' = 9,8883567$$

$$\log \nu = 9,3413418 \quad . \quad . \quad \log \nu' = 9,4635639$$

$$\log \sigma = 0,2201369 \quad . \quad . \quad \log \sigma' = 0,1798181$$

$$\log \rho = 9,3554177 \quad . \quad . \quad \log \rho' = 8,8005278$$

$$\log \tau = 9,9662458 \quad . \quad . \quad \log \tau' = 9,9211687$$

dai quali si formeranno in numeri i costanti cercati. Così avremo per esempio

$$\begin{aligned}\sigma &= 1,660110, & \rho &= 0,226682 \\ \sigma' &= 1,512928, & \rho' &= 0,0631725\end{aligned}$$

Calcolo della figura delle lenti.

Si assuma a bel principio per la figura della prima lente la proporzione proposta da Klügel $r : r' :: 1 : 3$. Per il § 105, ponendo $h = 0$, avremo

$$r = \frac{p}{\sigma \pm \tau \sqrt{\lambda - 1}}; \quad r' = \frac{p}{\rho \mp \tau \sqrt{\lambda - 1}};$$

quindi dedurremo

$$\frac{r'}{r} = 3 = \frac{\sigma \pm \tau \sqrt{\lambda - 1}}{\rho \mp \tau \sqrt{\lambda - 1}}; \quad \pm \sqrt{\lambda - 1} = \frac{3\rho - \sigma}{4\tau},$$

donde si otterrà λ col seguente calcolo

$$3\rho - \sigma = 0,980064 \quad \log(3\rho - \sigma) = 9,9912545$$

$$c. \log 4 = 9,3979400$$

$$c. \log \tau = 0,0337542$$

$$\log \sqrt{\lambda - 1} = 9,4229487$$

$$\log \tau = 9,9662458$$

$$\log \tau \sqrt{\lambda - 1} = 9,3891945$$

$$\text{quindi } \log(\lambda - 1) = 8,8458974, \quad \lambda = 1,070129$$

$$\tau \sqrt{\lambda - 1} = 0,245016$$

Affinchè r' risulti positivo e di triplo di r converrà prendere nel denominatore il segno inferiore. Si avrà così

$$\sigma = 1,660110$$

$$\log p = 9,5957743$$

$$-\tau \sqrt{\lambda - 1} = -0,245016 \quad \log\{\sigma - \tau \sqrt{\lambda - 1}\} = 0,1507853$$

$$\sigma - \tau \sqrt{\lambda - 1} = 1,415094$$

$$\log r = 9,4449890$$

$$r = 0,278605; \quad \text{però } r' = 0,835815.$$

Si proceda ora ai raggi della seconda lente; si dovrà primieramente ritrovare λ dall'equazione (3) § 118

$$\lambda' = -\frac{\mu\lambda}{\mu'} \frac{q^3}{p^3} + \frac{\rho' q^3}{p}; \quad \text{indi } R, R' \text{ col mezzo delle equazioni}$$

$$\frac{1}{R} = -\frac{p'}{p} + \sigma' \pm \frac{\tau' \sqrt{(\lambda' - 1)}}{q}; \quad \frac{1}{R'} = p' - \frac{\sigma'}{p} \mp \frac{\tau' \sqrt{(\lambda' - 1)}}{q}$$

Troveremo

$$\begin{array}{rcl} \log -\mu & = & 9,9945449 - \\ \text{c. log } \mu' & = & 0,116433 + \\ \log q^3 : p^3 & = & 0,6531258 - \\ \log \lambda & = & 0,0294361 + \\ \hline & = & 0,7887501 + \end{array} \quad \begin{array}{rcl} \log v' & = & 9,4635639 \\ \log q' & = & 9,6269658 \\ \text{c. log } p & = & 0,4042257 \\ \hline & = & 9,4947554 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \lambda' & = & + 6,14823 \\ & + & 0,31243 \\ \hline \lambda' & = & 6,46066 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} \log (\lambda' - 1) & = & 0,7372452 \\ \log \sqrt{(\lambda' - 1)} & = & 0,3686226 + \\ \log \tau' & = & 9,9211687 + \\ \text{c. log } q & = & 0,1865171 - \\ \hline \end{array}$$

$$\log \frac{\tau' \sqrt{(\lambda' - 1)}}{q} = 0,4763084 -$$

$$\begin{array}{rcl} \log -p' & = & 8,8005278 - \\ \log p & = & 9,5957743 + \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{rcl} \log -\sigma' & = & 0,1798181 - \\ & = & 9,5957743 \end{array}$$

$$\log -(p':p) = 9,2047535 - \quad \log -(\sigma':p) = 0,5840438 -$$

dai quali logaritmi formeremo (prendendo i segni superiori)

$$\frac{1}{R} = -0,160234 + 1,512928 \mp 2,994390 = -1,641696$$

$$\frac{1}{R'} = +0,063172 - 3,837183 \pm 2,994390 = -0,779808$$

$$\begin{array}{l} \text{Di qui dedurremo } R = -0,609126 \} \\ R' = -1,282663 \} \end{array}$$

Rimane ad assegnare la grossezza ed apertura delle lenti; ponendo $r' = hr$, e supponendo i l'angolo d'incidenza dell'ultimo raggio facilmente si troverà che la grossezza della lente convessa sarà prossimamente

$$= 2r \frac{h+1}{h} \text{ sen } \frac{1}{2} i, \text{ e la sua apertura } = 2r \text{ sen } i.$$

Facendo pertanto $i = 15^\circ$, $h = 3$, si troverà la grossezza della lente prima $= 0,01266$, e l'apertura $= 0,1442$. La grossezza della lente concava rimane arbitraria.

Qui l'apertura dell'obbiettivo è risultata notabilmente maggiore di quella assegnata al § 124 per cagione del

rapporto di $\zeta' : \zeta$ assunto ora notabilmente maggiore. È difficile ottenere per la costruzione dei grandi obbiettivi masse di vetro pure ed uniformi per lavorarle quali si richiederebbero dalle presenti dimensioni; converrà pertanto diminuire l'angolo i , con che diminuiranno cziandio gli errori di rifrangibilità e di figura. Si riscontra negli obbiettivi sortiti dalle più accreditate fabbriche un'apertura compresa fra $\frac{1}{12}$ ed $\frac{1}{15}$ della distanza focale, la quale nel nostro caso corrisponderebbe ad un angolo di circa 9° . Facendo $i = 10^\circ$, si troverà la grossezza della prima lente $= 0,005644$, l'apertura $= 0,09676$, numeri che sembrano convenienti.

127. Fingiamo in secondo luogo di determinare la prima lente colla condizione che stia $r : r' :: 5 : 2$. Si avrà

$$\frac{r}{r'} = \frac{5}{2}; \text{ si troverà poi}$$

$$\lambda = 2,468048$$

$$r = 0,731339$$

$$\lambda' = 14,49215$$

$$r' = 0,292535$$

$$R = -0,298143; \quad R' = 1,072360$$

cioè sarà la prima lente convessa; la seconda concava nella sua superficie anteriore, e convessa nella posteriore. Ritenendo per determinare l'apertura che l' debba essere $= 15^\circ$, si troverà $i = 3^\circ 26',6$ circa; quindi l'apertura risulterà $= 0,08800$, e la grossezza della prima lente $= 0,00460$.

Supponendo, come vedesi nel detto esempio praticato dal sig. Fraunhofer, l'apertura ridotta ad un $\frac{1}{15}$ della distanza focale, sarà $i = 2^\circ 36' 42''$; la grossezza della prima lente $= 0,00266$; ma potrà assumersi anche più grande, non facendola terminare nella intersezione delle due superficie. In generale l'apertura e la grossezza sono quantità suscettibili di variazioni, che si determinano secondo le circostanze, ed è cosa opportuna nel calcolo degli obbiettivi tenerle un poco maggiori, perchè o con diaframmi, o con l'anello dell'incassatura nel tubo facilmente restringesi l'apertura fino al punto in cui dall'esperienza si riscontrino tolti gli errori e le confusioni nelle immagini.

*Teoria degli obbiettivi acromatici del signor
Herschel.*

128. Abbiamo veduto precedentemente che in molte maniere si può determinare la forma delle lenti componenti un obbiettivo acromatico doppio, in cui si trascuri la loro grossezza. Il signor Herschel nella Memoria sopra citata (§ 98) ha con fine accorgimento approfittato dell'indeterminazione del problema per distruggere l'aberrazione di figura indipendentemente dalla distanza del punto radiante dall'obbiettivo, affine di adattarlo alle osservazioni tanto dei corpi celesti o lontanissimi, quanto degli oggetti mediocrementemente lontani. Dietro questa condizione riesce determinata la figura delle lenti sferiche in un obbiettivo doppio, come ora brevemente esporremo.

Introduciamo i valori reciproci delle quantità che s'incontrano nella teoria delle lenti, e ponghiamo $D = \frac{1}{a}$,

$L = \frac{1}{p}$, $L' = \frac{1}{q}$, cangiamo anche $\frac{1}{r}$ in r , $\frac{1}{r'}$ in r' , $\frac{1}{R}$ in R , $\frac{1}{R'}$ in R' ; m rappresenti l'indice di rifrazione.

Trascurando la grossezza delle lenti, e supponendole a contatto, sarà distrutta l'aberrazione longitudinale dipendente dalla diversa rifrangibilità, se sia (§ 118)

$$\zeta L + \zeta' L' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

la quale congiunta con l'equazione

$$L + L' = 1, \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

darà $L = \frac{\zeta}{\zeta' - \zeta}$, $L' = \frac{-\zeta}{\zeta' - \zeta}$.

Perchè sia distrutta l'aberrazione longitudinale della figura si dovrà avere $P + Q = 0$, essendo (§ 110)

$$P = \frac{m}{2} L(A + BD + CD); \quad Q = \frac{m'}{2} L'(A' + B'D' + C'D'); \\ D' = -(L - D).$$

Introducendo in Q questo valore di D' , l'equazione $P + Q = 0$ sarà soddisfatta, qualunque sia D , mediante le seguenti

$$m^1 L A + m'^1 L' (A' - B' L + C' L') = 0 \quad (3)$$

$$m^1 L B + m'^1 L' (B' - 2 C' L) = 0 \quad (4)$$

$$m^1 L C + m'^1 L' C' = 0 \quad (5)$$

Le quantità A, B, C, A', B', C' sono funzioni dell'indice di rifrazione e dei raggi delle lenti determinate nel modo seguente (§ 98)

$$A = \frac{m^2 - 2 m' + 2}{m^3} r - \frac{2 m + 1 - 2 m'}{m^1} r r' + r'^2$$

$$B = \frac{3 m + 4 - 3 m'}{m^3} r - \frac{3 m + 1}{m^1} r'$$

$$C = \frac{3 m + 2}{m^3}$$

e le quantità A', B', C' si ottengono da A, B, C cambiando m in m' , r in R , ed r' in R' .

$$\text{Pongasi ora } r + r' = \frac{L}{m-1} = \rho, \quad R + R' = \frac{L'}{m'-1} = \rho';$$

saranno ρ, ρ' due numeri conosciuti, mediante i quali potremo eliminare r', R' dalle espressioni di A, B, A', B' . Eseguita tale eliminazione si troverà che, chiamando per semplicità

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{m+2}{m}, \quad b = 2m+1, \quad e = \frac{4(m+1)}{m} \\ f &= 3m+1, \quad g = \frac{3m+2}{m} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

risulterà

$$m^1 A = a r - b \rho r + m^1 \rho^2$$

$$m^1 B = e r - f \rho$$

$$m^1 C = g.$$

Supponendo ora che a, b, e, f, g si cambino in a', b', e', f', g' quando m cangiasi m' si avrà del pari

$$m'^1 A' = a' R - b' \rho' R + m'^1 \rho'^2$$

$$m'^1 B' = e' R - f' \rho'$$

$$m'^1 C' = g'$$

Se ora questi valori s'introducono nelle equazioni (3), (4), (5) esse si cangiano nelle seguenti

$$L(a r^2 - b \rho r) + L' \{a' R^2 - (b' \rho' + L e') R\} \\ + m^2 L \rho^2 + m'^2 L' \rho'^2 + L L' f \rho' + L' L' g' = 0. \quad (8)$$

$$e L r + e' L' R - L f \rho - L' f' \rho' - 2 L L' g' = 0. \quad (9)$$

$$g L + g' L' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Si vedrà facilmente che quest'ultima equazione, almeno nelle comuni specie di vetri, è incompatibile con l'equazione $\zeta L + \zeta' L' = 0$, dalla quale viene distrutta l'aberrazione principale, e più forte nei cannocchiali, quella cioè che dipende dalla diversa rifrangibilità dei raggi luminosi; d'altra parte non potendosi da questa temere alcuna sensibile confusione, perchè serve a distruggere termini per loro natura piccolissimi dell'ordine D' dovressi omettere.

Le altre due equazioni (8), (9) determinano r, R mediante un'equazione di secondo grado. In seguito dalle equazioni $r = \rho - r$, $R = \rho' - R$, si avranno le altre due incognite r', R' . Ottenuti così i valori di r, r', R, R' , i loro reciproci saranno i valori dei raggi delle superficie delle lenti, come meglio apparirà dal seguente

Esempio numerico.

129. Si ritengano gli stessi elementi del calcolo dati nel § 126, e si cerchino dietro di essi le dimensioni di un obbiettivo acromatico nella ipotesi assunta dal signor Herschel.

Le distanze focali delle lenti di crown e di flint rimarranno le medesime; quindi si avrà come nel citato luogo

$$\log p = 9,5957743 + \quad \log q = 9,8134829 - \\ \text{e perciò}$$

$$\log L = c. \log p = 0,4042257 +$$

$$\log L' = c. \log q = 0,1855171 -$$

$$\log \rho = \log L - \log(m-1) = 0,6799498 +; \rho = +4,78575$$

$$\log \rho' = \log L' - \log(m'-1) = 0,3840896 -; \rho' = -2,42153.$$

Si formino dietro le equazioni (6) del § precedente i costanti a, b, e, f, g tanto per il crown, quanto per il flint, e si troverà

per il crown

per il flint

$\log a = 0,3630833$	. .	$\log a' = 0,3470607$
$\log b = 0,6085260$	. .	$\log b' = 0,6303250$
$\log e = 0,8204891$	. .	$\log e' = 0,8093739$
$\log f = 0,7474118$	. .	$\log f' = 0,7711082$
$\log g = 0,6341940$	. .	$\log g' = 0,6256849$
$\log m' = 0,3693828$	. .	$\log m'^1 = 0,4267666$

Mediante questi numeri si ridurranno facilmente a calcolo i coefficienti delle equazioni (8), (9). Si troverà così che l'equazione (8) divisa per L diviene

$$2,30719 r' - 19,43014 r + 49,62918 \\ - 1,34695 R' + 3,64393 R = 0 \quad (8)$$

e l'equazione (9) divisa per eL darà

$$r = 0,59044 R + 3,39156 \quad (9)$$

Sostituendo questo valore di r nella precedente, ed ordinandola rapporto ad R ottiensi la seguente

$$R' - 2,60208 R - 18,92597 = 0,$$

la quale risolta coi precetti soliti, dà per R due valori, cioè $R = -3,23964$, ovvero $R = +5,84172$.

130. Consideriamo da principio il primo valore di R ; l'equazione (9) darà $r = +1,47901$; in seguito si avrà $r' = \rho - r = +3,30674$, ed $R' = +0,81811$.

Ottenuti i valori di r, r', R, R' i loro reciproci saranno i raggi delle superficie delle due lenti. Quindi la costruzione dell'obbiettivo sarà la seguente:

Distanza focale dell'obbiettivo composto. . = 1,00000

Distanza focale della prima lente di crown

convesso-convessa. = + 0,394256

Distanza focale della seconda lente di flint

concavo-convessa. = - 0,650853

Raggio della prima superficie di crown. = + 0,67613

della seconda superficie. . . . = + 0,30241

della prima superficie di flint (con-

cava) = - 0,30868

della seconda superficie di flint (con-

vessa) = + 1,22233.

Supponendo che l'apertura sia determinata in modo che l' (§ 122) non superi $15''$, sarà $i = 3' 48''$, e quindi

$A = 0,0896$, e la grossezza della prima lente
 $= G = 0,00481$.

Apparisce ora di qui che la costruzione dell'obbiettivo riferito al § 127 molto si avvicina alla presente tanto per le dimensioni delle lenti, come ancora per la forma esterna delle superficie che risultano convesse in ambedue i casi.

131. Prendiamo in secondo luogo a considerare l'altro valore di $R = +5,84172$; questo darà $R' = -8,26325$; in seguito $r = +6,84076$, $r' = -2,05501$, dai quali prendendo i valori reciproci si avranno i seguenti raggi

per il crown prima superficie . . . $= +0,14619$

seconda superficie . . . $= -0,48662$

per il flint prima superficie . . . $= +0,17118$

seconda superficie . . . $= -0,12102$.

Questo obbiettivo differisce da tutti quelli che sono stati finora impiegati per i cannocchiali acromatici, avendo le due lenti convesso-concave, e le superficie concave opposte all'oggetto. Soltanto in qualche modo si assomiglia ad un obbiettivo proposto dal celebre Gauss (1), il quale ha la proprietà di riunire in un punto solo i raggi eterogenei sia che cadano in gran vicinanza all'asse, sia che cadano verso le estremità; imperciocchè è da osservarsi che i precetti esposti superiormente per distruggere l'errore di figura sferica si riferiscono ai raggi di media rifrangibilità, e quindi per gli altri sorge una nuova e piccola aberrazione in quanto che varia per essi l'indice di rifrazione. Non avendo quel celebre Matematico indicato la via tenuta nel calcolare le dimensioni, ci contenteremo di riferirne i risultati, come leggonsi nell'articolo del citato Giornale, riservandoci a parlarne più diffusamente nell'articolo seguente.

Indice medio di rifrazione per il crown $= 1,515162$ (2)

per i raggi rossi $= 1,504348$

Indice dei raggi medj per il flint . . . $= 1,60177$

per i raggi rossi $= 1,58181$

(1) *Zeitschrift für Astronomie etc.* Vol. IV. pag. 345-351. Abbiamo corretto l'errore tipografico incorso nel raggio della quarta superficie, sostituendovi quello che leggesi nell'errata corrige in fine del volume.

(2) *Ivi*, Vol. I. pag. 280.

Prima lente di crown

$$\text{Raggio della 1.ª superf.} = + \frac{3415,287}{28293,3} = + 0,12071 \text{ circ.}$$

$$\text{Raggio della 2.ª superf.} = - \frac{10133,007}{28293,3} = - 0,35813$$

Seconda lente di flint

$$\text{Raggio della 1.ª superf.} = + \frac{4207,421}{28293,3} = + 0,14870$$

$$\text{Raggio della 2.ª superf.} = - \frac{2807,320}{28293,3} = - 0,09921.$$

Del resto, siccome avverte lo stesso Gauss, la pratica esecuzione di questo obbiettivo incontrerebbe delle difficoltà, una delle quali ed anche la più rilevante sarebbe di ottenere pezzi così grandi di vetro puro quali si richiederebbero per arruotarne le lenti in queste misure, massime per i grandi cannocchiali destinati alle osservazioni astronomiche.

132. Dalle cose precedenti chiaramente risulta il grande vantaggio della costruzione degli obbiettivi acromatici secondo la teoria di Herschel; imperocchè rigettando l'ultima soluzione del § precedente, le curvature delle lenti risultano moderate, e l'apertura risulta anche maggiore di $\frac{1}{12}$, quale d'ordinario si suole assumere dai più riputati ottici e costruttori di cannocchiali.

Inoltre la superficie concava di flint acquista pressochè un raggio uguale a quello della lente convessa di crown, e la differenza nelle minori dimensioni è trascurabile, sicchè possono le due lenti porsi a contatto, circostanza reputata di un sommo vantaggio, e che fu già molto da Boschovich raccomandata. A tutto ciò si aggiunge la condizione introdotta che la riunione per i raggi medj emanati da un punto dell'asse accada indipendentemente dalla distanza del punto radiante dall'obbiettivo; condizione molto pregevole, poichè rende, siccome dicemmo, gli obbiettivi atti all'osservazione tanto dei corpi celesti situati in una immensa distanza, quanto degli oggetti terrestri posti a mediocri distanze. Per tutte queste considerazioni, convinto il signor Herschel della eccellenza della sua

II. *Variazione dei raggi della prima e quarta superficie dell'obbiettivo composto dipendente da un aumento di + 0,010 negl' indici di rifrazione del crown, e di + 0,010 nel flint.*

Valori di $\zeta : \zeta'$	Variaz. del raggio della prima superficie per + 0,010 nel		Variaz. del raggio della quarta superficie per + 0,010 nel	
	crown	flint	crown	flint
0,50	+0,00500	— 0,00036	+0,00921	— 0,03962
0,55	+0,00740	— 0,00011	+0,10080	— 0,05033
0,60	+0,00676	+0,00037	+0,11049	— 0,05659
0,65	+0,00563	+0,00125	+0,11614	— 0,06523
0,70	+0,00335	+0,00312	+0,11613	— 0,07570
0,75	— 0,00174	+0,00568	+0,10847	— 0,07207

133. L'uso delle due precedenti tavolette è ora abbastanza palese nella costruzione degli obbiettivi acromatici. Se si adopera una pasta di crown per cui l'indice di rifrazione sia = 1,524, ed una di flint, a cui corrisponda $m' = 1,585$, per i quali inoltre $\zeta : \zeta'$ sia esattamente compreso fra i numeri della prima colonna nella prima tavola, allora dai numeri scritti in faccia al valore di $\zeta : \zeta'$ si avranno i raggi delle superficie delle lenti, supponendo la distanza focale dell'obbiettivo composto = 1; e questi moltiplicati per il numero che deve rappresentare la distanza focale dell'obbiettivo daranno i raggi delle lenti nelle unità lineari assunte a termine di confronto.

Se poi m , m' , e $\zeta : \zeta'$ abbiano valori alcun poco diversi da quelli della tavola si procederà come nell'esempio seguente.

Sia $m = 1,519$; $m' = 1,589$; $\zeta : \zeta' = 0,5670$,
 si avrà $\frac{\zeta'}{\zeta} = 1,7637$; quindi $p = 1 - \frac{\zeta'}{\zeta} = 0,4330$;
 $q = 1 - \frac{\zeta}{\zeta'} = - 0,7637$.

Si calcolino in seguito i raggi della prima ed ultima superficie corrispondenti a $\zeta : \zeta' = 0,55$; e $\zeta : \zeta' = 0,60$ fra i quali cade il proposto 0,567. Si troverà

per $\zeta : \zeta'$	0,55	0,60
dalla Tavola I	$r = 0,67184$	0,67069
Var. di r per $-0,005$ nel val.		
di m (Tav. II)	$= -0,00370$	$-0,00338$
per $+0,004$ nel val.		
di m' (Tav. II)	$= -0,00004$	$+0,00015$
valore di $r =$	0,66810	0,66746
Quindi per $\zeta : \zeta' = 0,567$ sarà $r =$	0,66788	
Del pari sarà (Tav. I)	$R' = 1,45353$	1,42937
var. per $-0,005$ nel crown (T. II) =	$-0,05040$	$-0,05524$
var. per $+0,004$ nel flint (T. II) =	$-0,02013$	$-0,02264$
valori di $R' =$	1,38300	1,35149

e però per $\zeta : \zeta' = 0,567$ sarà $R' = 1,37229$.

Ottenuti i raggi della prima ed ultima superficie, si avranno quelli delle superficie interne r', R dalle formule fondamentali (§ 40), le quali daranno

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{(m-1)p} - \frac{1}{r}; \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{(m'-1)q} - \frac{1}{R'}$$

che ridotte a calcolo per il caso presente porgono

$$r' = 0,33868; \quad R = -0,33873.$$

Per l'apertura, stabilendo che l' non superi 15', si troverà $i = 4^\circ 13'$ circa; donde si avrà $A = 0,09825$, e la grossezza della prima lente = 0,00546; la grossezza della seconda lente si potrà assumere la metà della precedente, e potendo essere queste quantità anche un poco maggiori, fisseremo la grossezza della prima lente = 0,0060, della seconda = 0,0030.

Ottenute le dimensioni di un obbiettivo acromatico per la distanza focale = 1, si adatteranno facilmente a qualunque altra misura, e perciò non si dovrà fare altra cosa che moltiplicare le precedenti per la distanza focale che si vorrà dare alla lente duplicata. Così se questa debba

essere di 3 piedi parigini, o 36 pollici, avremo in pollici e linee per ciascuna lente le seguenti dimensioni.

	prima lente di crown	seconda lente di flint
Distanza focale	+ 15° 7',06	— 27° 5',92
Raggio della prima superficie + 24	0,524	— 12 2,331
Raggio della seconda superf. + 12	2,310	+ 49 4,829
Apertura dell'obbiettivo	42,44	
Groschezza delle lenti	2,592	. . . 1,296

134. Allorquando il calcolo delle dimensioni di un obbiettivo è ultimato, gioverà investigare fino a qual punto sieno distrutti gli errori di rifrangibilità e di figura, a che egregiamente si prestano i precetti dei § 120-121. Quantunque in tutte le cose precedenti sia stata trascurata la grossezza delle lenti nella supposizione che questa abbia una piccolissima influenza, si dovrà in questa riprova tenerne conto per vedere se le dimensioni ottenute esigere possano una qualche modificazione. Ad una tale verifica- zione si procederà pertanto nel modo seguente.

1.° Colle formule del § 121 per i raggi prossimi all'asse tanto medj come rossi o violetti si calcoleranno i valori di k , k' , k'' , k''' , e risultando eguali o pochissimo differenti i valori di k''' relativi ai raggi rossi e medj sarà tolto l'errore di rifrangibilità, nè la grossezza delle lenti turberà la bontà dell'obbiettivo.

2.° Colle formule del § 120 si calcoleranno per i raggi rossi e medj paralleli all'asse verso le estremità dell'obbiettivo ad una distanza del centro per es. di 0,040 le stesse quantità k , k' , k'' , k''' . Se in questo calcolo k''' corrispondente ai raggi medj risulterà uguale o pochissimo diverso da quello poc' anzi ottenuto, sarà distrutta l'aberrazione longitudinale di figura. Commendevolissima sarà poi quella forma di obbiettivo, nella quale si riscontre- ranno piccolissime differenze fra i valori di k''' relativi ai raggi di qualunque specie tanto prossimi, quanto lontani dall'asse.

Per mostrare all'ultima evidenza la egregia bontà degli obbiettivi calcolati negli esempj dei §§ 127 e 130 cre- diamo opportuno di riferire qui i risultati ottenuti dietro

il calcolo delle citate formule, dai quali apparirà ancora potersi in quelle circostanze trascurare con sicurezza le grossezze dei vetri.

Le dimensioni tanto dell' uno che dell' altro obbiettivo si riferiscono agl' indici di rifrazione adottati al § 126, ed abbiamo attribuito ad ambedue le seguenti grossezze; pella lente di crown $v = 0,0050$, per quella di flint $v' = 0,0030$; la distanza dal centro dei raggi estremi paralleli all' asse si è assunta $= 0,040$.

Dietro queste ipotesi per l' obbiettivo del § 127 si ottengono i seguenti valori:

Raggi prossimi all' asse		aberr. di rifrangibilità
Medj	Rossi	
$k = 2,111772$	$= 2,135060$	
$k' = 0,393988$	$= 0,400794$	
$k'' = 3,986615$	$= 3,790176$	
$k''' = 0,998022$	$= 0,998024$	$0,000002$.

È dunque distrutta l' aberrazione di rifrangibilità con trascurabile differenza nei raggi prossimi all' asse. Per i raggi remoti di $0,040$ dall' asse trovansi i risultati seguenti:

Raggi medj	Raggi rossi
$i = 3^{\circ} 8' 7'',12$	$= 3^{\circ} 8' 7'',12$
$l = 2 \ 2 \ 55,09$	$= 2 \ 3 \ 38,75$
$k = 2,109873$	$= 2,133677$
$i' = 8^{\circ} 56' 28'',74$	$= 8^{\circ} 55' 45'',24$
$l' = 13 \ 45 \ 23,51$	$= 13 \ 39 \ 19,39$
$O' = 5 \ 54 \ 6,80$	$= 5 \ 48 \ 2,52$
$k' = 0,383991$	$= 0,390780$
$i'' = 13^{\circ} 36' 24'',69$	$= 13^{\circ} 30' 20'',54$
$l'' = 8 \ 16 \ 31,89$	$= 8 \ 18 \ 20,70$
$O'' = 0 \ 34 \ 14,00$	$= 0 \ 36 \ 2,68$
$k'' = 4,011273$	$= 3,809567$
$i''' = 2^{\circ} 42' 14'',86$	$= 2^{\circ} 44' 3'',07$
$l''' = 4 \ 25 \ 21,27$	$= 4 \ 25 \ 23,14$
$O''' = 2 \ 17 \ 20,41$	$= 2 \ 17 \ 22,75$
$k''' = 0,998050$	$= 0,997702$

Errori residui di figura nei raggi medj = 0,000028
 nei raggi rossi = 0,000318.

Per l'obbiettivo del § 130, dedotto dalla teoria di Herschel, si troveranno invece i seguenti risultati:

Raggi prossimi all'asse

Medj	Rossi
$k = 1,951847$	$= 1,973885$
$k' = 0,393937$	$= 0,400746$
$k'' = 3,384278$	$= 3,249914$
$k''' = 0,997525$	$= 0,997551$
Errore resid. di rifrangibilità	$= 0,000026$

Raggi distanti dall'asse di 0,040

$i = 3^{\circ} 23' 29'',80$	$= 3^{\circ} 23' 29'',80$
$l = 2 \ 12 \ 57,59$	$= 2 \ 13 \ 44,82$
$i' = 8 \ 46 \ 18,79$	$= 8 \ 45 \ 31,74$
$l' = 13 \ 29 \ 34,76$	$= 13 \ 23 \ 30,98$
$O' = 5 \ 53 \ 48,18$	$= 5 \ 47 \ 44,22$
$i'' = 13 \ 20 \ 11,77$	$= 13 \ 14 \ 8,54$
$l'' = 8 \ 6 \ 47,05$	$= 8 \ 8 \ 29,70$
$O'' = 0 \ 40 \ 23,46$	$= 0 \ 42 \ 5,38$
$i''' = 2 \ 32 \ 39,68$	$= 2 \ 34 \ 21,31$
$l''' = 4 \ 9 \ 39,67$	$= 4 \ 9 \ 40,97$
$O''' = 2 \ 17 \ 23,45$	$= 2 \ 17 \ 24,98$
$k = 1,950387$	$= 1,972390$
$k' = 0,384397$	$= 0,391206$
$k'' = 3,399170$	$= 3,261920$
$k''' = 0,997479$	$= 0,997258$

Errore residuo di figura nei raggi medj = 0,000046
 nei raggi rossi = 0,000293.

Apparisce ora evidentemente la somma bontà di questi obbiettivi, imperocchè gli errori residui di rifrangibilità e di figura sono sommamente tenui, al di sotto di quelli che un diligente fabbricatore può commettere nel determinare i raggi delle lenti, e minori dei limiti stabiliti al § 116. Vedesi anche non avere la loro grossezza una sen-

sibile influenza; perciò sommamente è da raccomandarsi agli ottici pratici l'uso della tavola del signor Herschel da noi sopra riferita, ed opportunamente illustrata con un esempio, potendosi da essa sempre dedurre con somma facilità, e con un calcolo a tutti comune le dimensioni di un eccellente obbiettivo acromatico.

135. In generale è facile di vedere che la grossezza delle lenti eserciterà una leggera influenza negli errori di rifrangibilità tutte le volte che i valori di k e di k' risultino maggiori dell'unità. In fatti riprendendo le equazioni del § 121 ponendovi $s = 0$, e sviluppando in serie rapporto v e v' , che fingeremo quantità piccolissime, delle quali sia permesso trascurarne le potenze superiori alla prima, esse si cangeranno nelle seguenti

$$\frac{m}{k} = (m-1) \frac{1}{r}$$

$$\frac{1}{k'} = (m-1) \frac{1}{r'} + \frac{m v}{k^2} + \frac{m}{k} = (m-1) \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) + \frac{m v}{k^2}$$

$$\frac{m'}{k''} = \frac{1}{k'} - (m'-1) \frac{1}{R} = (m-1) \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) - (m'-1) \frac{1}{R} + \frac{m v}{k^2}$$

$$\frac{1}{k'''} = \frac{m'}{k''} - (m'-1) \frac{1}{R'} + \frac{m' v'}{k'^2}$$

ovvero, sostituendo il valore di $\frac{m'}{k'}$

$$\frac{1}{k'''} = (m-1) \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) - (m'-1) \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) + \frac{m v}{k^2} + \frac{m' v'}{k'^2} \quad (A)$$

dalla quale deve k''' risultare costante per tutti i valori di m , m' .

Allorquando nella costruzione di un obbiettivo sono state adempite le condizioni perchè l'errore di rifrangibilità sia tolto nel caso di v , v' uguali a zero, i primi due termini di questa equazione danno per tutti i colori un valore costante; perciò la confusione prodotta dalla diversa rifrangibilità e dipendente dalla grossezza delle lenti sarà rappresentata dalla variazione di $\frac{m v}{k^2} + \frac{m' v'}{k'^2}$, che sarà tanto più piccola quanto più grandi risulteranno k , k' . Dovranno pertanto in pratica evitarsi quelle costruzioni,

nelle quali il raggio della prima superficie ed il numero k risultassero soverchiamente piccoli.

Costruzione degli obbiettivi acromatici, avendo riguardo alla grossezza e distanza delle lenti.

136. Abbiamo trascurato in tutte le cose precedenti la grossezza delle lenti, e le abbiamo riguardate come poste a contatto; per verità si è dimostrato che nelle lenti contigue la grossezza dei vetri è trascurabile, soprattutto se la superficie esterna di crown abbia un gran raggio, sicchè piccoli risultino gli angoli d'incidenza. Se poi si facesse la prima lente isoscele (la qual cosa in vero non sembra troppo commendevole, dovendosi restringere l'apertura per evitare angoli d'incidenza troppo grandi nelle interne superficie) non si potrebbe del tutto trascurarne la grossezza. Eulero ha dato nella sua Diottrica delle formule generali per avere riguardo tanto alla grossezza, come ad una distanza arbitraria, che si può lasciare fra una lente e l'altra; ma negli esempj l'ha il più delle volte messa da parte; ritornando in seguito sopra questo argomento nei Commentarj dell'Accademia di Pietroburgo (Vol. XVIII.) ha esposto i precetti per il calcolo degli obbiettivi acromatici tanto con due, quanto con tre lenti, che con utili modificazioni sono stati eziandio da Klügel riferiti nella più volte lodata sua Diottrica. Le regole di Eulero nulla lasciano a desiderare per parte della semplicità; ma riducendosi a considerare le lenti come superficie refringenti condotte per le loro metà e poste a distanza, può sorgere una nuova correzione in alcuni casi non del tutto trascurabile, come mostrò il signor Klügel nel Vol. XIII. degli Atti di Gottinga, il quale ivi espose un suo metodo, in vero laborioso, ma conducente a lodevoli risultamenti. Riuscendo il metodo Euleriano molto comodo per il calcolo, ed utile specialmente per quei casi nei quali non si vogliano porre le lenti all'immediato contatto, noi qui lo riferiremo brevemente, aggiungeremo il metodo del profess. Klügel, ed in fine esporremo un nuovo metodo di correggere le dimensioni prossimamente conosciute di un obbiettivo per quei casi nei quali si aspira all'ultima perfezione, come nei grandi obbiettivi ad uso

degli stromenti astronomici, per i quali non deve giammai reputarsi soverchia qualunque diligenza.

137. Sieno PP' , QQ' (fig. 35) due lenti, la prima convessa e la seconda concava, costituenti un obbiettivo acromatico; A sia il centro della prima lente, B quello della seconda, e fingiamole per maggiore generalità separate da un certo intervallo tale che sia $AB = \omega$, riguardandole come ridotte ad una superficie refringente, la prima condotta per A , la seconda per B . Sieno α , α le distanze dei punti di riunione da A per la prima lente, p la sua distanza focale, m l'indice di rifrazione che corrisponde alla specie di vetro di cui è formata; per la seconda lente le stesse quantità sieno b , β , q , m' . Supponendo che i raggi entrino nella prima lente paralleli all'asse, sarà $\alpha = p$; e β sarà la distanza focale dell'obbiettivo composto. Essendo nelle formule generali la distanza della prima dalla seconda lente $= \alpha + b$, avremo $\alpha + b = \omega$. Poichè riuscirà per la piccolezza di ω , b negativo, pongasi $\frac{\alpha}{b} = \frac{p}{b} = -\pi$, da cui risulterà $b = -\frac{p}{\pi}$.

Siccome fatta astrazione dal segno si ha $\alpha > b$, sarà $\pi > 1$. Sostituendo questo valore di b nell'equazione $\alpha + b = \omega$, essa diverrà $\omega = \alpha - \frac{p}{\pi} = p - \frac{p}{\pi}$, da cui

$$\text{formeremo} \quad \dots \quad \frac{\omega}{p} = 1 - \frac{1}{\pi} \quad \dots \quad (1)$$

L'equazione $\frac{1}{q} = \frac{1}{b} + \frac{1}{\beta}$ per la sostituzione di b diverrà

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{\beta} - \frac{\pi}{p} \quad \dots \quad (2)$$

La condizione perchè in un sistema di due lenti sia distrutta l'aberrazione longitudinale è (§ 87) espressa dall'equazione

$$\frac{dm}{m-1} \frac{1}{p} + \frac{dm'}{m'-1} \frac{1}{q} \frac{b'}{\alpha'} = 0, \text{ la quale}$$

(ponendo, come finora si è praticato, $\frac{dm}{m-1} = \zeta$,

$$\frac{dm'}{m'-1} = \zeta') \text{ diviene per la sostituzione dei valori di } \alpha, b, q$$

$$\zeta \frac{1}{p} + \zeta' \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{\beta} - \frac{\pi}{p} \right) = 0 \quad . \quad . \quad (3)$$

da cui tosto ricavasi

$$p = \frac{\zeta' - \zeta \pi}{\zeta} \pi \beta \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Introdotta nell'equazione (2) questo valore di p , con facili riduzioni darà

$$q = - \frac{\zeta' - \zeta \pi}{\zeta \pi} \beta \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Le equazioni (4), (5) daranno le distanze focali delle lenti avendo riguardo alla distanza dei loro centri, ed apparisce che posto $\pi = 1$, si ricade nelle espressioni analoghe del § 118, come doveva accadere, poichè tale condizione si riduce a porre $a + b = 0$, cioè a trascurare la grossezza dei vetri. Risulta ancora di qui che aumentando π diminuisconsi i numeri p , q ; in fatti l'equazione (4) differenziata nel supposto di p , π variabili darà

$$dp = \frac{\zeta' - 2\zeta\pi}{\zeta} \beta d\pi. \text{ Ora in tutte le specie di vetri fi-}$$

no al presente adoprate nella costruzione degli obbiettivi acromatici si ha $\zeta' < 2\zeta$; dunque (a motivo di $\pi > 1$) crescendo π , p diminuirà. Differenziando del pari l'equa-

$$\text{zione (5), si troverà } dq = \frac{\zeta'}{\zeta \pi} \beta d\pi, \text{ il secondo mem-}$$

bro della quale è positivo quando $d\pi$ è tale; quindi la distanza focale q essendo negativa ne viene diminuita. Siccome poi al diminuirsi delle distanze focali devonsi pure diminuire le aperture delle lenti, lo che è noivo alla chiarezza, così converrà prendere per π il più piccolo numero possibile, riducendo le lenti a contatto, o quasi al contatto, come vedesi praticato nei cannocchiali sortiti dalle fabbriche più riputate.

Supponendo isoscele la prima lente, e la sua semiapertura rappresentata da un arco di 15° , sarà la sua semigrossezza = sen. v. $15^\circ \times$ raggio; e poichè in tali lenti il raggio differisce poco dalla distanza focale p , sarà la semigrossezza = sen. v. $15^\circ \times p = \frac{1}{30} p$ circa. Dando alla

lente concava una simile grossezza, sarà $\omega = \frac{1}{15} p$, e quin-

di l'equazione (1) darà $\pi = \frac{15}{14}$. Eulero e Klügel tanto per evitare l'immediato contatto, quanto per lasciare fra le lenti di crown e di flint un piccolo intervallo da disporre a piacere per togliere qualche piccolo errore commesso dal fabbricatore nella costruzione delle lenti, assunsero $\omega = \frac{1}{12} p$, e però $\pi = \frac{12}{11}$, numero che sembra in vero un poco troppo grande.

138. Determiniamo ora i raggi delle due lenti in modo che sia tolta l'aberrazione longitudinale. Dovremo perciò soddisfare all'equazione $P + \frac{b^4}{a^4} Q = 0$; essendo

$$P = \frac{\lambda \mu}{p^3}, \quad Q = \frac{\mu'}{q} \left(\frac{\lambda'}{q^4} + \frac{v'}{b \beta} \right) \quad (\S 108).$$

Quindi la precedente equazione, per essere $a = p$, diviene

$$\mu \lambda + \frac{\mu' \lambda' b^4}{p q^3} + \frac{\mu' v' b^3}{p q \beta} = 0.$$

Assumendo pertanto a piacere la figura della prima lente, e quindi il numero λ , si avrà

$$\lambda' = -\frac{p q^3}{b^4} \frac{\mu \lambda}{\mu'} - \frac{q^3}{b} \frac{v'}{\beta}.$$

Supponendo la distanza focale dell'obbiettivo composto $= 1$, e scrivendo per b il suo valore $-\frac{p}{\pi}$, si avrà

$$\lambda' = -\pi^4 \frac{q^3}{p^3} \frac{\mu \lambda}{\mu'} + \frac{q^3 \pi}{p} v' \quad . \quad (6)$$

In fine i raggi R , R' della superficie anteriore e posteriore della lente concava saranno dati dalle equazioni (§ 104)

$$\frac{1}{R} = \sigma' - \frac{\rho' \pi}{p} \pm \frac{\tau' \sqrt{(\lambda' - 1)}}{q} \quad . \quad (7)$$

$$\frac{1}{R'} = \rho' - \frac{\sigma' \pi}{p} \mp \frac{\tau' \sqrt{(\lambda' - 1)}}{q} \quad . \quad (8)$$

Quanto al numero λ , che rimane arbitrario, si determinerà dietro le formule del § 105, le quali danno per il caso dei raggi paralleli all'asse $\frac{r'}{r} = \frac{\sigma \pm \tau \sqrt{(\lambda - 1)}}{\rho \mp \tau \sqrt{(\lambda - 1)}}$.

Ponendo pertanto il rapporto $\frac{r'}{r} = h$, avremo

$$\sqrt{(\lambda - 1)} = \frac{h\rho - \sigma}{(h + 1)\tau} \quad . \quad . \quad (a)$$

dove si potrà determinare il numero h dietro le considerazioni fatte al § 124, o dietro il rapporto che ottiensi fra i raggi della prima lente dalla tavoletta del signor Herschel.

Metodo del signor Klügel per determinare le dimensioni di un obbiettivo acromatico.

139. Eulero nella Memoria più volte citata, e Klügel nella sua Diottrica esposero le dimensioni di un obbiettivo acromatico duplicato, facendo isoscele la prima lente di crown. In seguito questo secondo autore nei Commentarj di Gottinga dimostrò con calcolo rigoroso che nell'obbiettivo Euleriano sussisteva una notevole aberrazione di figura originata dal grande incremento che ricevono gli angoli d'incidenza nel sortire dalla seconda superficie di una lente isoscele; ove presso a poco si raddoppiano (§ 124). Assumendo quindi per la prima lente un'apertura di 30°, come fecero i citati autori, il raggio luminoso incontra i cateti d'incidenza nei successivi passaggi sotto angoli troppo grandi, e quindi le quantità trascurate nella formula esprimente l'aberrazione longitudinale di figura acquistano una sensibile influenza. Se poi si restringe l'apertura alla metà ad oggetto di non incontrare angoli maggiori di 15°, si porta alla chiarezza un detrimento troppo grande, e si perde in gran parte il vantaggio procurato dalla combinazione di due lenti dotate di diverso potere rifrattivo e dispersivo.

Dietro queste considerazioni propose Klügel di determinare la figura della prima lente colla condizione che l'angolo d'incidenza i fosse uguale all'angolo di emergenza l' (§ 124), per il qual caso dimostrammo dover es-

sere $r : r' :: 2 - m : m$, o prossimamente $r : r' :: 1 : 3$, la qual circostanza corrisponde alla minima rifrazione, come già dimostrammo accadere nei prismi (§ 10). Dopo ciò procede con calcolo trigonometrico alla ricerca dei raggi delle superficie nel modo seguente:

1.° Stabiliscasi per scala la distanza focale della prima lente che rappresentasi per 1, facendo per brevità

$\frac{m}{2-m} \frac{r'}{r} = h$, si otterrà dall'equazione (B) § 40, ponendovi

$$p = 1 \dots r = (m-1) \frac{h+1}{h}; \quad r' = (m-1) (h+1).$$

2.° Si fissi la grossezza della prima lente, e dicasi v ; indi dalle equazioni

$$\frac{r}{k} = \frac{m-1}{m}; \quad \frac{r'}{k'} = \frac{m r'}{k-m v} + m-1 \quad (\S 121).$$

Si calcolino le quantità k, k' , che rappresentano le distanze dei punti di concorso dei raggi prossimi all'asse delle due superficie anteriore e posteriore della prima lente; e queste grandezze si ricavano con ogni accuratezza tanto per i raggi medj, quanto per i raggi estremi.

3.° Dietro le equazioni (1), (2), (3), (4), (5) per i raggi medj paralleli all'asse che cadono verso l'estremità dell'obbiettivo ad un punto arbitrariamente assunto si calcolino i valori di k, k' , e la differenza con i rispettivi valori di queste grandezze ottenuti nel num. 2.° darà gli errori di figura pelle superficie della prima lente.

4.° Si stabilisca la distanza che vuolsi lasciare fra la prima e la seconda lente. Questa deve essere o nulla, o molto piccola per le ragioni addotte al § 137. Il signor Klügel nell'esempio numerico che propone la $fissa = 0,01$, posta la distanza focale della prima lente $= 1$; potrà tale distanza essere utile a correggere i piccoli errori commessi dall'artefice nella determinazione dei raggi, rendendola un poco maggiore o minore fuorchè per esperienza si trovino immagini scovre di colori. Chiamandola s , si passerà a determinare il raggio della prima superficie concava della lente di flint colla condizione che i raggi medj tanto prossimi all'asse, quanto remoti sieno rivolti ad uno stesso punto distante dalla medesima superficie di una quantità che indicheremo per k'' . Per i raggi prossimi all'asse si

ha la relazione (§ 121) $\frac{R}{k''} = \frac{R}{m'(k' - s)} - \frac{m' - 1}{m'}$,

e per i raggi remoti si hanno le equazioni (§ 120)

$$\text{sen } i'' = \frac{k' + R - s}{R} \text{sen } O'; \quad \text{sen } l'' = \frac{\text{sen } i''}{m'};$$

$$k'' = \frac{R \text{sen } l''}{\text{sen } O''} - R, \text{ essendo } O'' = l'' - i'' + O'$$

come nel citato luogo.

In virtù di questa condizione i due valori di k'' devono riuscire uguali, al che si perviene con un opportuno valore di R . L'autore ne riduce la ricerca alla risoluzione di un'equazione del terzo grado; ma siccome questa è approssimata, così sarà più sicura la via delle false posizioni, fingendo ad R alcuni valori, finchè le differenze fra i due valori di k'' risultino molto tenui in due vicine ipotesi; allora con una semplice proporzione si giungerà allo scopo desiderato.

Ottenuto R , si calcoli k'' eziandio per i raggi estremi rossi o violetti prossimi all'asse, e si stabilisca la grossezza della seconda lente, che rappresenteremo per ν' .

5.° Si determini il raggio dell'ultima superficie R' colla condizione che i raggi di luce di qualunque natura prossimi all'asse si rivolgano ad uno stesso punto in una distanza da essa $= k''$, al che si giunge direttamente nel modo seguente.

Pongasi per i raggi medj l'indice di rifrazione $= m'$, e per i raggi rossi $= \mu'$; la quantità $k'' - \nu'$ relativa ai raggi medj $= a$, e per i raggi rossi $= \alpha$. Avremo dal § 121

$$\text{per i raggi medj} \quad \frac{R'}{k'''} = \frac{m' R'}{a} - (m' - 1)$$

$$\text{per i raggi rossi} \quad \frac{R'}{k'''} = \frac{\mu' R'}{\alpha} - (\mu' - 1)$$

Uguagliando i due valori di $\frac{R'}{k'''}$ otterremo un'equazione da cui ricavasi

$$R' = \frac{a \alpha (m' - \mu')}{m' \alpha - \mu' a}$$

ove non conviene perdere di vista che un valore negativo

di R' corrisponde ad una superficie convessa, essendosi supposto R' positivo nelle formule del § 120-121 ricavate dalla ipotesi di una superficie concava.

140. Da questa semplice esposizione dei precetti di Klügel rilevasi facilmente che sarà distrutta l'aberrazione longitudinale di rifrangibilità per i raggi prossimi all'asse; ma sussisterà ancora un'aberrazione di figura dipendente dalla rifrazione subita nell'attraversare l'ultima superficie, aberrazione riguardata dall'autore come trascurabile; e per vero dire siamo a ciò autorizzati dalla piccolezza degli angoli d'incidenza e rifratti che vi s'incontrano nell'esempio da esso addotto, ed in qualche altro che ho fatto variando i rapporti fra i raggi della prima lente. In alcuni casi però questa nuova aberrazione non è del tutto trascurabile, e vi si può rimediare dando ad R delle piccole variazioni, e determinando dietro la formula superiore il valore di R' ad ogni ipotesi. Calcolato l'errore residuo di figura nell'obbiettivo per ciascheduna supposizione, coi metodi ordinarij d'interpolazione si giunge facilmente a trovare i veri valori di R e di R' che danno per i raggi medj paralleli all'asse tanto prossimi come remoti lo stesso valore di k''' . Sussiste pure in questi obbiettivi un altro errore, comune in vero eziandio agli altri ricavati coi metodi superiormente esposti, ed è che distrutta l'aberrazione di figura per i raggi medj, non è esattamente distrutta per i raggi estremi, ai quali compete un diverso indice di rifrazione, e quindi mentre i raggi rossi prossimi si riuniscono con tutti i raggi medj che entrano per l'obbiettivo, i raggi rossi cadenti verso l'estremità si dirigono ad un punto da quello alcun poco diverso. Il sig. Bohnenberger, per quanto è a me noto, fu il primo che prendesse a valutare questo tenue errore, e dimostrò che in un obbiettivo acromatico calcolato coi superiori precetti in modo che l'aberrazione di figura fosse tolta per i raggi medj prossimi all'asse, e remoti per un angolo d'incidenza $= 10^\circ$, la residua aberrazione di figura nei raggi rossi è $= \frac{19}{27294}$ della distanza focale (*Zeitschrift für Astron.* Vol. I. pag. 280.), se i raggi della prima lente stanno fra loro nella proporzione di $2 - m : m$. Ma dimostrò del pari che variando questo rapporto, varia pure

l'errore residuo, e riducesi circa alla metà assumendolo di 2 : 3 in luogo di 1 : 3; non giunse però a distruggerlo interamente, e stimò anzi la cosa impossibile. Queste considerazioni del signor Bohnenberger indussero un altro celebre Matematico (il dott. Gauss) ad occuparsi dello stesso argomento, ed in un articolo del medesimo Giornale (Vol. IV. pag. 345.) di cui abbiamo fatto menzione al § 131, espose i risultati delle sue ricerche, dietro le quali trovò possibile di riunire in un punto i raggi paralleli eterogenei prossimi all'asse, ed incidenti in una determinata distanza, o per esprimersi più esattamente, i raggi di due speciali colori, poichè la completa riunione per tutti i colori in un punto è impossibile. Le dimensioni e la forma dell'obbiettivo da esso calcolato fu già riferita al § ora citato, perciò qui soltanto aggiungeremo l'indicazione che egli ne dà colle sue proprie parole tradotte nella nostra lingua.

„Non appartiene al mio scopo lo sviluppare qui la parte matematica di queste ricerche. Io solo osservo che il problema, calcolando le aberrazioni di figura dietro il metodo di Eulero, e trascurando la grossezza e distanza delle lenti, conduce ad un'equazione del quarto grado, che ha due radici reali. La soluzione approssimata qui esibita si appoggia ad un calcolo indiretto, col quale tutto si riduce esattamente alla coincidenza. Ai Matematici sarà sufficiente questa indicazione. Del resto una radice reale di questa equazione deve essere rigettata, perchè ad essa si congiungono curvature delle superficie troppo forti, e l'imperfetto togliimento dell'aberrazione di figura si renderebbe troppo sensibile „.

In fatti non è difficile assicurarsi che la soluzione del presente problema dipende da un'equazione del quarto grado. Ritengansi le denominazioni tutte esposte al § 128, ed avendo determinato i numeri L , L' che distruggono in due determinate specie di vetro l'aberrazione di rifrangibilità per i raggi medj prossimi all'asse, dovrà determinarsi la figura delle lenti in modo che i raggi medj ed i raggi rossi paralleli all'asse, ed incidenti verso le estremità si riuniscano allo stesso punto. Trascurando la grossezza e distanza delle lenti avremo per i raggi medj l'equazione $P + Q = 0$, la quale a motivo di $D = 0$, in

grazia della distanza infinita da cui procedono i raggi, si riduce alla unica equazione (8) di secondo grado fra r , R , i cui coefficienti sono funzioni di quantità costanti ρ , ρ' , e dell'indice medio di rifrazione.

Una simile equazione fra le stesse variabili r , S si otterrà per distruggere l'errore di figura dei raggi rossi, nella quale i coefficienti saranno funzioni simili delle stesse costanti, e dell'indice di rifrazione per questa seconda specie di raggi. L'eliminazione delle variabili si eseguisce con somma facilità, e conduce ad un'equazione del quarto grado, dalle di cui radici dipende la forma dell'obbiettivo, la quale fortemente varia cogli indici di dispersione e di rifrazione nelle diverse specie di vetro. Tutto ciò più chiaramente apparirà dal seguente

Esempio numerico.

141. Sia, come nell'esempio riferito da Gauss,

$$\left. \begin{array}{l} m = 1,515162 \\ m - d m = 1,504348 \end{array} \right\} \text{ per il crown ;}$$

$$\left. \begin{array}{l} m' = 1,60177 \\ m' - d m' = 1,58181 \end{array} \right\} \text{ per il flint ;}$$

si otterrà da questi valori $\log \zeta = 8,3220426$

$$\log \zeta' = 8,5207300 ;$$

e quindi $\frac{\zeta}{\zeta'} = 0,632867$; $\frac{\zeta'}{\zeta} = 1,580110$, donde risulteranno le distanze focali delle lenti (§ 118) per i raggi medj $p = 0,367133$; $q = -0,580110$.

In seguito si avrà

$$L = \frac{1}{p} = +2,723809 ; \quad \log L = 0,4351766 +$$

$$L' = \frac{1}{q} = -1,723809 ; \quad \log L' = 0,2364897 -$$

Ottenuti i valori L , L' per i raggi di media rifrangibilità nelle due lenti, si formeranno i costanti ρ , ρ' colle equazioni

$$\rho = \frac{L}{m-1} = +5,287286 ; \quad \rho' = -2,864569$$

i logaritmi dei quali sono $\log \rho = 0,7232328 +$
 $\log \rho' = 0,4570592 -$

Per determinare ora la figura delle lenti si dovrà ridurre a numeri l'equazione (8) § 128 tanto per i raggi di media rifrangibilità come per i raggi rossi; e primieramente per i raggi di media rifrangibilità troveremo i logaritmi costanti

$$\begin{array}{ll} \log a = 0,3654863 + & \log a' = 0,3519158 + \\ \log b = 0,6053400 + & \log b' = 0,6236151 + \\ \log e = 0,8221669 + & \log e' = 0,8127287 + \\ \log f = 0,7439396 + & \log f' = 0,7638254 + \\ \log g = 0,6354829 + & \log g' = 0,6282477 + \end{array}$$

Mediante questi numeri l'equazione indicata riducesi alla seguente

$$r^4 - 9,185156 r + 25,677478 \\ + 1,542868 R - 0,613398 R^2 = 0 \quad (1)$$

In secondo luogo per i raggi rossi assumeremo $m-dm$ in luogo di m , ed $m' - dm'$ in luogo di m' ; e formeremo primieramente i numeri L, L' in virtù delle equazioni

$$L = (m - 1 - dm) p; \quad L' = (m' - 1 - dm') p',$$

le quali daranno

$$\begin{array}{ll} \log L = 0,4259631 + & L = + 2,666632 \\ \log L' = 0,2218404 - & L' = - 1,666634 \end{array}$$

ed in seguito i logaritmi costanti per questo caso diverranno

$$\begin{array}{ll} \log a = 0,3672590 & \log a' = 0,3549482 \\ \log b = 0,6030032 & \log b' = 0,6194711 \\ & \log e' = 0,8148299 \\ & \log f' = 0,7593226 \\ & \log g' = 0,6298552. \end{array}$$

Ottenuti questi costanti, il calcolo dell'equazione (8) condurrà alla seguente

$$r^4 - 9,098650 r + 25,288958 \\ - 0,607528 R + 1,471025 R^2 = 0 \quad (2)$$

Sottraendo questa dalla precedente, e dividendo il residuo per il coefficiente di r , trovasi

$$r = 4,491250 + 0,830497 R - 0,0678566 R^2 \quad (3)$$

ed introducendo questo valore di r in una delle precedenti, per esempio nella (1), si giungerà all'equazione del quarto grado seguente

$$0,0046045 R^4 - 0,112710 R^3 + 0,090079 R^2 + 1,374565 R + 4,595983 = 0.$$

Con facili tentativi si scuopre, che essa ha due radici reali e positive, la prima delle quali è compresa fra 5,5 e 5,6; la seconda fra 23 e 24. Omettendo la seconda, che darebbe per il raggio della terza superficie una quantità soverchiamente piccola, si calcolerà la prima con più precisione, e col metodo comune di Newton si troverà

$$R = + 5,570368.$$

Introdotta questo valore nell'equazione (3), si avrà

$$r = + 7,011904.$$

Per ultimo sarà $r' = \rho - r = - 1,724618$

$$R' = \rho' - R = - 8,434937.$$

Prendendo i valori reciproci dei numeri r , r' , R , R' si avranno per ordine i raggi delle lenti come segue

della 1. ^a superficie (convessa) .	+ 0,142615	} di crown
della 2. ^a superficie (concava) .	- 0,579839	
della 3. ^a superficie (convessa) .	+ 0,179521	} di flint.
della 4. ^a superficie (concava) .	- 0,118555	

La forma di questo obbiettivo molto si avvicina a quella assegnatagli dal ccl. Gauss (§ 131), e solo notabilmente differisce nel raggio della seconda superficie, intorno a che credesi bene di osservare, che vi si può temere introdotto un qualche altro errore tipografico oltre quello notato in fine del volume; imperciocchè i valori dei raggi ivi assegnati non conducono all'asserita distanza focale 28293,3.

Del resto osserveremo che i valori di k e k'' risultano all'incirca uguali 0,42.... 0,26, e perciò la grossezza delle lenti induce una notevole confusione per le ragioni addotte al § 135, donde sembra non essere conveniente l'adottarli in pratica, perchè la loro costruzione richiederebbe una soverchia esattezza nella determinazione dei raggi e delle grossezze dei vetri.

Equazioni di condizione per la correzione di un obbiettivo prossimamente acromatico.

142. Allorquando con una qualunque teoria siamo pervenuti a determinare le dimensioni prossime di un obbiettivo si possono facilmente stabilire le equazioni di condi-

zione fra i piccoli incrementi che devono dare ai raggi delle sue superficie affinchè l'acromatismo sia perfetto quanto è possibile. A tale oggetto lo riguarderemo, come nei §§ 120-121, composto di due lenti, la prima delle quali sia convesso-convessa, e la seconda concavo-concava; ed in questa ipotesi i raggi delle quattro superficie r, r', R, R' dovranno riputarsi positivi, e diverranno negativi se le superficie prendessero la curvatura contraria a quella qui descritta. Ciò posto tengasi invariabile il raggio della prima superficie r , dietro cui gli altri tutti si andranno modellando, e fingasi che gli altri ricevano gli aumenti piccolissimi $d r', d R, d R'$. La distanza k''' , alla quale un raggio di determinata natura va ad incontrare l'asse dietro l'ultima lente, si può esprimere per l'equazione

$$k''' = \alpha + \beta d r' + \gamma d R + \epsilon d R' \quad . \quad (1)$$

dove $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon$ sono funzioni dell'indice di rifrazione e dei raggi delle lenti. Quanto al numero α si ottiene per le diverse specie di raggi tanto prossimi all'asse, come remoti dietro i primi valori dei raggi dalle equazioni dei §§ 120-121; i numeri β, γ, ϵ si otterranno dai differenziali delle stesse equazioni, come tosto mostreremo. Frattanto è evidente che pel concorso dei raggi medj e rossi prossimi all'asse si avranno due equazioni simili alla superiore (1); e due altre se ne otterranno pel concorso delle stesse specie di raggi incidenti verso l'estremità dell'obbiettivo in direzione parallela all'asse. Dovendo per l'acromatismo k''' risultare lo stesso in tutti i casi, la risoluzione delle indicate quattro equazioni darà le correzioni cercate dei raggi, ed anche la distanza focale dell'obbiettivo composto.

143. Resta a vedere come si determinino i coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon$, e perciò principieremo dai raggi medj prossimi all'asse. Si ritengano le denominazioni tutte del § 121; sarà α il valore di k''' calcolato dietro quelle equazioni quando si attribuiscono ad r, r', R, R' i loro valori prossimi. Fingasi in seguito che k', k'', k''' si anmentino dei loro differenziali $d k', d k'', d k'''$ quando r', R, R' ricevono gl'incrementi $d r', d R, d R'$. Per una data specie di raggi sarà in virtù della prima equazione k costante. In seguito differenziando la seconda si troverà

$$d k' = \frac{k'' (m-1)}{r'^2} d r' \dots$$

Differenziando le seconda equazione dopo di averla divisa per R , si otterrà (facendo $s = 0$)

$$d k'' = \frac{1}{m'} \frac{k'''}{k''} d k' - \frac{m' - 1}{m'} \frac{k''}{R} d R,$$

ovvero sostituendo per $d k'$ il suo valore precedente

$$d k'' = \frac{m-1}{m'} \frac{k'''}{r'^2} d r' - \frac{m' - 1}{m'} \frac{k''}{R} d R.$$

Per ultimo, se dividasi l'equazione quarta per R' , si differenzij, e si sostituisca per $d k''$ il valore ora ottenuto, si troverà

$$\begin{aligned} d k''' &= \frac{(m-1) k'' k'''}{(k'' - v')^2 r'^2} d r' - \frac{(m' - 1) k'' k'''}{(k'' - v')^2 R} d R \\ &\quad - \frac{(m' - 1) k'''}{R'} d R' \dots \dots (2) \end{aligned}$$

nella quale i coefficienti di $d r'$, $d R$, $d R'$ sono i valori sopra indicati per β , γ , ϵ . Si ridurranno a numeri assumendo per m ed m' gl'indici di rifrazione dei raggi medj e dei raggi rossi, e per k'' , k''' i loro valori prossimi già precedentemente ottenuti nel calcolo di α tanto per i raggi medj che per i raggi rossi. Si avranno così due equazioni della forma (1), la differenza delle quali darà la relazione fra le correzioni $d r'$, $d R$, $d R'$ perchè sia tolta l'aberrazione longitudinale, avendo riguardo anche alla grossezza delle lenti.

Più prolisso è il calcolo dei coefficienti α , β , γ , ϵ per i raggi remoti dall'asse, i quali devono cavarsi dal differenziare le equazioni del § 120 ridotte a numeri tanto per i raggi medj, quanto per i raggi rossi. Scegliendo una distanza arbitraria dal centro, per esempio di 0,040 a motivo di r costante, i , l , k saranno costanti, e ponendo $i - l = 0$, sarà pure O costante. Il differenziale dell'equazione (3) rapporto ad r' darà

$$d i' = - \frac{k - v}{r'^2} \frac{\text{sen } O}{\cos i} d r';$$

L'equazione (4) differenziata darà $d l' = \frac{m \cos i'}{\cos l'} d i'$,

cioè avremo $d i' = M d r'$, $d l' = N d r'$; M ed N essendo facilmente assegnabili in numeri.

In seguito essendo $O' = l' - i' + O$ sarà $d O' = d l' - d i'$, cioè $= P d r'$, essendo P determinabile in numeri ed $= N - M$; l'equazione $k' + r' = \frac{r' \operatorname{sen} l'}{\operatorname{sen} O'}$ differenziata darà

$$d k' = \left(-1 + \frac{\operatorname{sen} l'}{\operatorname{sen} O'} \right) d r' + \frac{r' \cos l'}{\operatorname{sen} O'} d l' - \frac{r' \operatorname{sen} l'}{\operatorname{sen} O'} \cot O' d O'.$$

Sostituendo per $d l'$, $d O'$ i loro valori dati per $d r'$ sarà $d k' = K d r'$, essendo facile ad assegnare in numeri il valore di K tanto per i raggi medj, che per i rossi.

Proseguendo collo stesso ordine, dai differenziali delle equazioni (6), (7), (8) per la via di continue sostituzioni si otterrà $d k''$ dato per $d r'$ e $d R$ con coefficienti numerici determinati; e per ultimo i differenziali delle equazioni (9), (10), (11) daranno $d k'''$ espresso per $d r'$, $d R$, $d R'$, come più apertamente si farà manifesto col seguente

Esempio numerico.

143. Sia proposto di correggere l'obbiettivo risultante dalla teoria del signor Herschel, di cui abbiamo dato le dimensioni al § 130, che (adattando convenientemente i segni) danno

$$r = + 0,67613; \quad r' = + 0,30241$$

$$R = + 0,30868; \quad R' = - 1,22233;$$

i valori di m , m' , ai quali si appoggia la costruzione di quest'obbiettivo sono (§ 126)

$$\text{per i raggi medj } m = 1,530000; \quad m' = 1,634494$$

$$\text{per i raggi rossi } m = 1,521000; \quad m' = 1,616707.$$

Al § 134, dandone la riprova, troviamo per

$$\text{i raggi medj } k'' = 3,384278; \quad k''' = 0,997525$$

$$\text{i raggi rossi } k'' = 3,249914; \quad k''' = 0,997551,$$

mediante i quali numeri (ritenendo, come allora si assume, $v' = 0,003$) l'equazione superiore (1) diviene

$$\text{per i raggi medj } k''' = 0,997525 + 5,77699 d r' \\ - 6,63786 d R - 0,425519 d R'$$

$$\text{per i raggi rossi } k''' = 0,997551 + 5,67960 d r' \\ - 6,45259 d R - 0,410745 d R'.$$

Prendendo ora a considerare il punto di concorso con

l'asse dei raggi remoti, fingeremo come nel citato luogo un fascetto parallelo all'asse alla distanza di 0,040, e riducendo a numeri i differenziali delle equazioni del § 120 troveremo i seguenti risultati

Per i raggi medj

$$\begin{aligned}
 d i' &= - 0,441606 d r' \\
 d l' &= - 0,686708 d r' \\
 d O' &= - 0,345102 d r' \\
 d k' &= + 0,935427 d r' \\
 d i'' &= - 0,242625 d r' - 0,425947 d R \\
 d l'' &= - 0,145898 d r' - 0,256135 d R \\
 d O'' &= - 0,145375 d r' + 0,169812 d R \\
 d k'' &= + 42,08033 d r' - 49,23768 d R \\
 d i''' &= - 0,144920 d r' + 0,168482 d R \\
 &\quad + 0,026756 d R' \\
 d l''' &= - 0,237263 d r' + 0,275838 d R \\
 &\quad + 0,043805 d R' \\
 d O''' &= - 0,237718 d r' + 0,277168 d R \\
 &\quad + 0,017049 d R' \\
 d k''' &= + 5,957188 d r' - 6,970118 d R \\
 &\quad - 0,425905 d R'
 \end{aligned}$$

Per i raggi rossi

$$\begin{aligned}
 d i' &= - 0,441602 d r' \\
 d l' &= - 0,682399 d r' \\
 d O' &= - 0,240797 d r' \\
 d k' &= + 0,951125 d r' \\
 d i'' &= - 0,238365 d r' - 0,425909 d R \\
 d l'' &= - 0,144983 d r' - 0,259056 d R \\
 d O'' &= - 0,147415 d r' + 0,166853 d R \\
 d k'' &= + 39,37067 d r' - 44,55606 d R \\
 d i''' &= - 0,146209 d r' + 0,165547 d R \\
 &\quad + 0,026756 d R' \\
 d l''' &= - 0,236763 d r' + 0,268041 d R' \\
 &\quad + 0,043328 d R' \\
 d O''' &= - 0,237969 d r' + 0,269347 d R \\
 &\quad + 0,016572 d R' \\
 d k''' &= + 5,985954 d r' - 6,771192 d R \\
 &\quad - 0,413803 d R'
 \end{aligned}$$

donde poi infine si formeranno le due seguenti equazioni
 per i raggi medj remoti $k''' = 0,997479 + 5,95719 d r'$
 $- 6,97012 d R - 0,425905 d R'$
 per i raggi rossi remoti $k''' = 0,997258 + 5,98395 d r'$
 $- 6,77119 d R - 0,413803 d R'.$

Risolvendo ora le quattro equazioni trovate fra $d r'$, $d R$, $d R'$, e k''' coi precetti prescritti per le equazioni di primo grado, si troverà

$d r' = +0,0018927$, $d R = +0,0008945$, $d R' = -0,0006296$
 ed il punto di concorso di tutti i raggi ad una distanza
 $k''' = 1,0027885$.

Sommando per ultimo le trovate correzioni cogli assunti valori dei raggi si avranno le seguenti dimensioni

- Raggio della 1.^a superficie (convessa) = 0,6761300
 2.^a superficie (convessa) = 0,3043027
 3.^a superficie (concava) = 0,3095745
 4.^a superficie (convessa) = 1,229596

144. *Scolio I.* Se ora si calcola direttamente il punto di riunione dei raggi medj e rossi tanto prossimi che remoti, si troverà che l'aberrazione longitudinale è esattamente distrutta; ma rimane tuttavia un piccolo errore di figura, ed è presso a poco quello che rimaneva da bel principio nei raggi rossi distribuito all'incirca in parti uguali e contrarie fra le due specie di raggi. La ragione è riposta nella piccola differenza dei coefficienti di $d R'$ nelle superiori equazioni, la quale essendo dell'ordine delle correzioni, rende incerta la determinazione delle correzioni cercate, ed avvisa al tempo stesso che non si possono distruggere tutte le aberrazioni senza indurre variazioni grandi e finite nei raggi, come d'altronde è abbastanza palese da quanto abbiamo detto ai §§ 140-141, esponendo la teoria di un obbiettivo in cui tutti i raggi sì prossimi che remoti si riuniscano in un punto. Dovremo quindi contentarci di distruggere l'aberrazione longitudinale di rifrangibilità per i raggi prossimi all'asse, e l'aberrazione longitudinale di figura per i raggi medj, e perciò si renderà inutile di far variare R' , come anche di calcolare l'ultima equazione relativa al concorso dei raggi estremi con l'asse. In questo caso pertanto, ponendo

$dR' = 0$ nelle superiori equazioni, e trascurandone l'ultima, avremo per la correzione dell'obbiettivo le tre seguenti

$$\text{Raggi medj prossimi } k''' = 0,997525 + 5,77699 d r' - 6,63786 d R$$

$$\text{Raggi rossi prossimi } k''' = 0,997551 + 5,67960 d r' - 6,45259 d R$$

$$\text{Raggi medj remoti } k''' = 0,997479 + 5,95719 d r' - 6,97012 d R$$

le quali risolte danno

$$d r' = -0,0001139, d R = -0,0002001, k''' = 0,998195.$$

Quindi le dimensioni dell'obbiettivo corretto saranno le seguenti

$$\begin{aligned} \text{Raggio della prima superficie (convessa)} &= 0,676130 \\ \text{della seconda superficie (convessa)} &= 0,302296 \\ \text{della terza superficie (concava)} &= 0,308480 \\ \text{della quarta superficie (convessa)} &= 1,222330 \end{aligned}$$

Se direttamente si calcolano in questo obbiettivo i punti di riunione dei raggi, si otterranno i seguenti risultati;

$$\begin{aligned} \text{Per i raggi medj prossimi} & \quad k''' = 0,998197 \\ \text{i raggi rossi prossimi} & \quad k''' = 0,998198 \\ \text{i raggi medj remoti} & \quad k''' = 0,998202 \\ \text{i raggi rossi remoti} & \quad k''' = 0,997974. \end{aligned}$$

Perciò l'aberrazione residua

$$\begin{aligned} \text{di rifrangibilità sarà} & \quad = 0,000001 \\ \text{di figura nei medj} & \quad = 0,000005 \\ \text{di figura nei rossi} & \quad = 0,000264 \end{aligned}$$

quantità tutte esigue e trascurabili.

145. *Scolio II.* Fin qui noi abbiamo considerato gli obbiettivi acromatici come composti di due lenti, la prima delle quali convessa, e composta di quel vetro che appellasi *crown* dagl'Inglesi, o vetro verdolino comune (*vitrum coronarium*); la seconda concava di un vetro cristallino dagl'Inglesi appellato *flint*. Si potrebbe invertire l'ordine e porre prima la lente concava di flint; indi la lente convessa di crown, e s'incontrano in fatto nei trattati di Diottrica di Eulero e di Klügel esempj di tali disposizioni. Ma queste comportano minore apertura, e presentano delle circostanze che non possono consigliarne l'uso pratico. Noi quindi tralasceremo di farne parola, rimandando i nostri lettori per essi alle opere citate, ed

invece passeremo ad esporre brevemente la teoria degli obbiettivi triplicati.

Degli obbiettivi acromatici composti di tre lenti, delle quali la prima e terza di crown, la seconda di flint.

146. Dopo che Dollond dimostrò colle proprie esperienze, che si potevano ottenere immagini scevre dai colori con due diverse specie di vetri, facilmente comprese potersi ottenere lo scopo tanto con due lenti, quanto con tre; anzi le stesse sue osservazioni dato gli avevano che un fascio di luce bianca sortiva senza sensibile traccia di colori da un sistema di tre prismi, dei quali i due esterni erano di crown ed il medio di flint con l'angolo refringente opposto ai primi, mantenendosi tuttavia in questo sistema una notabile rifrazione.

La piccolezza della distanza focale nella lente convessa, e quindi le grandi curvature delle superficie delle lenti nelle specchie di vetro da esso adoperate lo obbligarono ad una mediocre apertura, che egli per il primo insegnò a rendere alquanto maggiore adoperando un sistema di tre lenti poste a contatto, delle quali le due esterne erano convesse e di crown, l'interna poi ugualmente concava da ambe le parti e di flint. Vero è che aumentata in seguito la forza dispersiva del flint, e perfezionatasi anco la teoria, si può con due sole lenti ottenere un obbiettivo di grande apertura, come dimostrano gli esempj dei §§ precedenti, e quindi raro sarà il caso di dovere ricorrere ad una terza lente, la quale aumenta il prezzo e la difficoltà dell'opera; inoltre la luce per il passaggio attraverso questa terza lente molto viene indebolita. Tale indebolimento però viene abbondantemente compensato dalla maggiore apertura, ed un buon obbiettivo a tre lenti produce un effetto meraviglioso se congiungesi ad un bene inteso oculare.

Eulero nella sua Diottrica ha dato la teoria di questi obbiettivi trascurando la grossezza delle lenti, e fuggendole a contatto. In seguito tenne a calcolo la distanza dei loro centri, fingendo anche fra esse interposto un piccolo spazio per rimediare agli errori di costruzione. Klügel apportò alla teoria di Eulero un utile miglioramento

introducendo la condizione che tende a distruggere i contorni colorati delle immagini, ai quali riparava Eulero col mezzo degli oculari. Noi non entreremo in dettagli troppo estesi, nè riferiremo copia di esempj i quali per la indeterminazione del problema si possono in infinite forme variare, ma procureremo di dare i principj fondamentali di questa teoria tanto per il caso di lenti sottilissime ed a contatto, quanto pel caso che sieno poste a breve distanza.

147. Sieno le distanze focali delle tre lenti indicate per ordine da p, q, r , e gl'indici di rifrazione ad esse relativi da m, m', m , imperocchè supporremo la terza lente costruita dello stesso vetro della prima; i numeri $\frac{dm}{m-1}$;

$\frac{dm'}{m'-1}$ siano chiamati ζ, ζ' come in addietro, e pongasi il rapporto $\frac{\zeta'}{\zeta} = N$.

Sieno inoltre per la prima lente le distanze dei punti di riunione rappresentate da a, α ; i raggi delle sue superficie da R, R' .

Le stesse quantità

per la seconda lente siano b, β, R'', R'''

per la terza lente . . . c, γ, R'', R''' .

I numeri arbitrari, per i quali si esprimono le aberrazioni di sfericità sieno $\lambda, \lambda', \lambda''$; questi dovranno essere sempre positivi, ed il minimo loro valore = 1 (§ 103). Le quantità $\mu, \nu, \rho, \sigma, \tau$ rappresentino quelle funzioni dell'indice di rifrazione definite al § 104 per il vetro della prima e terza lente, e con un accento sieno esse riferibili al vetro della seconda lente. Per ultimo π, π', π'' indichino i rapporti delle aperture dalle lenti alle loro distanze focali, per i quali (§ 92) vennero espresse le variazioni degli angoli d'incontro dei raggi principali coll'asse, e le condizioni che sia tolto dalle immagini il contorno colorato.

Fingendo che i raggi luminosi vengano alla prima lente in direzioni parallele, sarà $a = \infty$, perciò $\alpha = p$; γ sarà la distanza focale dell'obbiettivo composto, che prenderemo a misura comune, e porremo = 1. Le distanze suc-

essive delle lenti saranno $\alpha + b$, $\beta + c$, che fingeremo uguali, e rappresenteremo per ω , cosicchè sia $\alpha + b = \beta + c = \omega$. Essendo le lenti a contatto sarà $\omega = 0$, ed in generale dovrà riguardarsi sempre come un numero positivo e piccolo.

Ciò posto, le equazioni alle quali si appoggia la teoria degli obbiettivi triplicati saranno

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{\alpha}; \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{b} + \frac{1}{\beta}; \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{c} + \frac{1}{\gamma} = 1 + \frac{1}{c} \quad (1)$$

I raggi delle lenti verranno determinati dalle seguenti equazioni

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{\sigma \pm \tau \sqrt{(\lambda-1)}}{p}; & \frac{1}{R'} &= \frac{\rho \mp \tau' \sqrt{(\lambda'-1)}}{p} \\ \frac{1}{R''} &= \frac{\rho'}{b} + \frac{\sigma'}{\beta} \pm \frac{\tau' \sqrt{(\lambda'-1)}}{q}; \\ \frac{1}{R'''} &= \frac{\rho'}{\beta} + \frac{\sigma'}{b} \mp \frac{\tau' \sqrt{(\lambda'-1)}}{q}; \\ \frac{1}{R'''} &= \frac{\rho}{c} + \sigma \pm \frac{\tau \sqrt{(\lambda''-1)}}{r}; \\ \frac{1}{R'''} &= \frac{\sigma}{c} + \rho \mp \frac{\tau \sqrt{(\lambda''-1)}}{r}; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Sarà tolta l'aberrazione longitudinale di rifrangibilità mediante l'equazione (§ 87)

$$\zeta \frac{1}{p} + \zeta' \frac{b'}{\alpha'} \frac{1}{q} + \zeta'' \frac{b' c'}{\alpha' \beta'} \frac{1}{r} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Per togliere l'aberrazione di sfericità richiedesi l'adempimento dell'equazione (§ 109) $P + \frac{b^4}{\alpha^4} Q + \frac{b^4 c^4}{\alpha^4 \beta^4} R = 0$, la quale nel caso presente a motivo di a infinito e di $\mu'' = \mu$, $\nu'' = \nu$, $\gamma = 1$, diviene

$$\frac{\mu}{p} \frac{\lambda}{p'} + \frac{\mu' b^4}{q \alpha^4} \left(\frac{\lambda'}{q'} + \frac{\nu'}{b \beta} \right) + \frac{\mu b^4 c^4}{r \alpha^4 \beta^4} \left(\frac{\lambda''}{r'} + \frac{\nu}{c} \right) = 0 \quad (4)$$

In fine per il § 92 sarà tolto il contorno colorato soddisfacendo all'equazione

$$d i = d \pi' - d \pi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

148. Consideriamo primieramente l'ultima condizione relativa al contorno colorato, e sviluppiamone l'equazione, imperciocchè quelle del § 93 erano applicabili al caso in cui i raggi sortissero dall'ultima lente paralleli, e fosse $\gamma = \infty$, mentre qui i raggi paralleli devono tutti dirigersi ad un punto comune. Nel § 92 si trovò per il caso di tre lenti

$$d i' = d \pi' - d \pi = -\frac{\beta \pi}{r} \frac{d q}{q} - \frac{\pi' d r}{r} + \frac{c-r}{r} d \pi.$$

Dall'equazione $\pi q = (a+b) \phi$, in grazia del secondo membro costante si ottiene $d \pi = -\frac{\pi d q}{q}$; sostituito questo valore nell'equazione precedente, si cangia in

$$d \pi' - d \pi = -\pi \frac{(\beta + c - r)}{r} \frac{d q}{q} - \pi' \frac{d r}{r}.$$

D'altra parte si ha (§ 82)

$$\frac{d q}{q} = -\frac{d m'}{m' - 1} = -\zeta'; \quad \frac{d r}{r} = -\frac{d m}{m - 1} = -\zeta;$$

introducendo pertanto questi valori, ed osservando che $\beta + c = \omega$, avremo per la cercata condizione l'equazione

$$d \pi' - d \pi = -\frac{\pi \zeta' (r - \omega)}{r} + \pi' \zeta = 0.$$

Resta ad assegnarsi il rapporto fra π' e π . Servono a ciò le due equazioni (§ 60)

$$\pi' r = \left(\frac{a \beta}{b} - c \right) \phi + \pi c,$$

$$\pi q = (a+b) \phi;$$

dalle quali si ottiene $\frac{\pi' r}{\pi q} = \frac{a \beta - b c}{(a+b) b} + \frac{c}{q}$; e sostituendo per q il suo valore si avrà

$$\frac{\pi' r}{\pi q} = \frac{a \beta - b c}{(a+b) b} + \frac{c}{b} + \frac{c}{\beta},$$

la quale può scriversi sotto la seguente forma

$$\frac{\pi' r}{\pi q} = \frac{a(c+\beta)}{b(a+b)} + \frac{c}{\beta}.$$

Supponendo ora le distanze delle lenti uguali fra di loro sarà $a+b=c+\beta$, e quindi $\frac{\pi' r}{\pi q} = \frac{a}{b} + \frac{c}{\beta}$.

Risulta da ciò che dalla coesistenza delle due equazioni

$$\left. \begin{aligned} \frac{\pi' \zeta' (r - \omega)}{r} - \pi' \zeta &= 0 \\ \frac{\pi' r}{\pi q} &= \frac{\alpha}{b} + \frac{c}{\beta} \end{aligned} \right\} (6)$$

sarà tolto il contorno colorato delle immagini.

Si potrebbe credere superfluo l'adempimento di questa condizione nel caso delle lenti sottilissime ridotte a contatto. In fatti nasce il contorno colorato dalla decomposizione dei raggi principali condotti per il centro della prima lente, i quali non attraversando più la seconda e terza lente per il centro si sciolgono in colori; ora per ipotesi essendo trascurabili le loro grossezze e distanze essi attraversano l'obbiettivo irrefratti. Eulero nella sua teoria degli obbiettivi triplicati determinò i rapporti delle distanze focali con continui tentativi, e Klügel si attenne alla teoria di Eulero nel caso delle minime grossezze. A me sembra, che coll'ordinario ragionamento dei limiti rendasi palese doversi aver riguardo a tale condizione anche in questo caso, ed essa in fatti presenta il rapporto fra le distanze focali p, q, r , di modo che le disposizioni arbitrarie non cadono che sulle dimensioni dei raggi delle superficie, come si rileverà dall'esempio.

Costruzione degli obbiettivi triplicati nella supposizione che siano trascurabili le grossezze e distanze delle lenti.

149. Avremo in questo caso $\omega = 0$, però $\alpha = -b$; $\beta = -c$, e le equazioni (1) sommate daranno

$$\frac{1}{\gamma} = 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \quad . \quad . \quad (a)$$

L'equazione (3), ponendo $\frac{\zeta'}{\zeta} = N$, darà

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = -N \frac{1}{q} \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

le quali insieme combinate daranno

$$q = -(N-1) \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

ove è da osservarsi, che fingendo la seconda lente costruita di flint, e le altre due di crown, sarà $\zeta' > \zeta$, ed

$N > 1$; quindi q negativa, e la seconda lente sarà concava.

Restano a determinarsi i rapporti delle distanze focali p, r ; la seconda delle equazioni (6) a motivo di $\alpha = -b$, $\beta = -c$ dà $\pi' r = -2 \pi q$, mentre la prima fatto $\omega = 0$, diviene $\pi N = \pi'$: da esse si ottiene l'equazione

$$r = -\frac{2q}{N} \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

Sostituito questo valore di r nell'equazione (b), si avrà

$$p = r = -\frac{2q}{N}.$$

Pertanto le distanze focali delle lenti saranno così espresse

$$p = r = \frac{2(N-1)}{N}; \quad q = -(N-1).$$

Sarà inoltre $\alpha = p = -b$; $\beta = \frac{N-2}{2(N-1)} = -c$, di modo che non resterà che a determinare la figura delle lenti in modo che sia distrutta l'aberrazione di sfericità. A tale oggetto consideriamo l'equazione (4), la quale per il caso presente si può scrivere sotto l'aspetto

$$\frac{\mu}{p} (\lambda + \lambda'') + \frac{\mu' \lambda'}{q^3} + \frac{\mu v}{p c} - \frac{\mu' v'}{p q \beta} = 0,$$

ovvero

$$\lambda + \lambda'' = -\frac{p^3}{q^3} \frac{\mu'}{\mu} \lambda' - \frac{v p^3}{c} + \frac{\mu' v'}{\mu} \frac{p'}{q \beta} \quad . \quad (e)$$

che stabilisce una relazione fra i numeri $\lambda, \lambda', \lambda''$, e quindi fra i raggi delle superficie da essi dipendenti in virtù delle sopra riferite equazioni (2). Avendosi ora fra queste indeterminate una sola equazione, due di esse rimangono al nostro arbitrio, e la scelta loro dovrà farsi in modo che le aperture risultino le più grandi possibili. Con questa vista Dollond e gli altri scrittori di diottrica resero isoscele la lente concava, e tale deve considerarsi quando non si abbia riguardo all'aumento degli angoli del raggio luminoso coi cateti d'incidenza. Dietro ciò il numero λ' è determinato in virtù dell'equazione (§ 106)

$$\sqrt{(\lambda' - 1)} = \frac{\sigma' - \rho'}{2 \tau'} \frac{b - \beta}{b + \beta} \quad . \quad . \quad (f)$$

Per l'altro numero, che rimane arbitrario, conviene prenderlo in modo che i raggi delle altre superficie o non siano minori di quelli della lente concava, o poco da quelli differiscano, affinchè l'apertura non venga di troppo diminuita. Tutto ciò meglio apparirà dal seguente esempio numerico.

Esempio.

150. Sia $m = 1,53$, $m' = 1,58$, ed inoltre suppongasi $\zeta' : \zeta :: 4 : 3$, di modo che $N = \frac{4}{3}$, come nel § 125.

Si troverà $p = r = \frac{1}{2}$; $q = -\frac{1}{3}$. In seguito

$$b = -\frac{1}{2}; \quad \beta = -1; \quad c = 1;$$

$$R'' = R''' = 2(m' - 1)q = -\frac{1,16}{3} = -0,38667.$$

Le quantità μ , ν ec. avranno gli stessi valori che nel § 125; l'equazione (f) darà $\sqrt{(\lambda' - 1)} = \frac{\sigma' - \rho'}{6\tau'}$, donde ritraesi $\lambda' = 1,074936$.

L'equazione (e) ridotta a numeri darà

$$\lambda + \lambda'' = 3,317912.$$

I raggi delle superficie delle lenti convesse, a motivo di $p = r = \frac{1}{2}$, $c = \gamma = 1$, saranno dati dalle equazioni

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R} &= 2\sigma \pm 2\tau\sqrt{(\lambda-1)} = 3,3202 \pm 2\tau\sqrt{(\lambda-1)} \\ \frac{1}{R'} &= 2\rho \mp 2\tau\sqrt{(\lambda-1)} = 0,4534 \mp 2\tau\sqrt{(\lambda-1)} \\ \frac{1}{R''} &= \rho + \sigma \pm 2\tau\sqrt{(\lambda''-1)} = 1,8868 \pm 2\tau\sqrt{(\lambda''-1)} \\ \frac{1}{R'''} &= \rho + \sigma \mp 2\tau\sqrt{(\lambda''-1)} = 1,8868 \mp 2\tau\sqrt{(\lambda''-1)} \end{aligned} \right\}$$

Quanto ai numeri λ , λ'' dovendo essere positivi, ed avvicinarsi all'unità quanto è possibile per avere piccole

aberrazioni di figura in ciascuna lente, faremo le seguenti supposizioni per iscegliere fra esse le più convenienti.

1.^o Sia $\lambda = \lambda'' = 1,658956$. Si troverà $\tau \sqrt{(\lambda - 1)} = \tau \sqrt{(\lambda'' - 1)} = 0,75106$. Per ottenere positivi i raggi della prima lente si dovranno prendere i segni inferiori. Si troverà così

$$R = 0,55003; \quad R' = 0,51137.$$

Per la seconda lente risultano positivi tanto dietro i segni superiori, quanto dietro i segni inferiori. Affinchè i raggi delle superficie poste a contatto si avvicinino di più all'eguaglianza, prenderemo i segni superiori. Così si otterrà $R'' = 0,29517$; $R' = 2,57560$.

Apparisce ora che il raggio R'' è alcun poco minore del raggio della superficie concava di flint; quindi questa disposizione non è del tutto favorevole, non ottenendosi da essa la massima apertura.

2.^o Pongasi $\lambda'' = 1$, con che l'ultima lente diviene isoscele, circostanza molto comoda in pratica. Sarà $\lambda = 2,317912$; $\tau \sqrt{(\lambda - 1)} = 1,06094$. Così risulterà, presi i segni inferiori,

$$R = 0,83450; \quad R' = 0,38831; \quad R'' = R' = 0,53000.$$

Lodevole è questa disposizione, perchè tutti i raggi superano quelli della superficie concava, ed R' moltissimo se li avvicina.

3.^o Vogliasi rendere $R''' = R'' = 0,38667$; sarà

$$\frac{1}{R''} = 2,58618; \quad \text{e però}$$

$$2 \tau \sqrt{(\lambda'' - 1)} = \frac{1}{R''} - (\rho + \sigma) = 0,69938, \quad \text{e}$$

$\lambda'' = 1,142852$. Quindi $\lambda = 2,17506$. Si troverà $2 \tau \sqrt{(\lambda - 1)} = 2,00588$; in seguito $R = 0,76086$; $R' = 0,40662$; $R'' = 0,38667$; $R' = 0,84218$.

Le aperture si dovrebbero calcolare dietro i precetti del § 123, avendo cura che gli $i, i', i'' \dots l, l', l' \dots$ non superino 15° . Ma non ricercandosi qui una somma precisione, si potranno (come prescrive Eulero) ritenere uguali alla corda dell'arco di 30° nella superficie di minor raggio, la quale equivale a circa la metà del raggio medesimo, dopo di che saranno determinate eziandio le grossezze delle lenti, e si potrà istituire la riprova tri-

gonometrica e rigorosa per un obbiettivo triplicato con gli stessi principi, e con le stesse formule che si adoperarono per i duplicati. In tal guisa si scoprirà eziandio se l'apertura data dalla regola di Eulero debbasi diminuire, e di quanto sia a diminuirsi.

Riunendo pertanto le trovate dimensioni, e fingendo la distanza focale dell'obbiettivo composto = 1000, si avranno per la sua costruzione i seguenti valori, quando riducansi le lenti a contatto, e trascurisi la loro grossezza.

Prima disposizione.

Lenti	I.	II.	III.
Distanza focale	500	— 333	500
Raggio della 1. ^a superficie .	550	— 387	295
della 2. ^a superficie .	511	— 387	257,6
Grossezza	11	5	10,2

Apertura = 148.

Seconda disposizione.

	I.	II.	III.
Distanza focale	500	— 333,3	500
Raggio della 1. ^a superficie .	834,5	— 386,7	530
della 2. ^a superficie .	388,3	— 386,7	530
Grossezza	17,8	5,0	17,8

Apertura totale = 193.

Terza disposizione.

	I.	II.	III.
Distanza focale	500	— 333,3	500
Raggio della 1. ^a superficie .	760,9	— 386,7	386,7
della 2. ^a superficie .	406,6	— 386,7	842,2
Grossezza delle lenti . .	17,8	5,0	17,8

Apertura totale = 193.

151. Per riconoscere fino a qual punto siano in questi obbiettivi distrutti gli errori di rifrangibilità e di figura, ho stimato opportuno di calcolare per la seconda e la terza disposizione la via tanto dei raggi rossi, quanto dei raggi medj prossimi all'asse, ed incidenti in una distanza dal centro = 0,090, supponendo le grossezze della prima e terza lente = 0,018; quella della seconda = 0,005. Ho ottenuto così i seguenti risultati:

Seconda disposizione. Raggi prossimi all'asse

Medj	Rossi	aberr. di rifrangib.
$k = 2,40903$	$= 2,42815$	
$k' = 0,49881$	$= 0,50488$	
$k'' = 3,12999$	$= 3,11218$	
$k''' = -1,00576$	$= -1,03042$	
$k^{iv} = +265,388$	$= +86,736$	
$k^v = 0,99423$	$= 0,99441$	$= 0,00018.$

Raggi incidenti in 0,090

Angoli $i = 6^{\circ} 11' 28'',8$	$= 6^{\circ} 11' 28'',8$
$l = 4 \ 2 \ 31,6$	$= 4 \ 3 \ 32,4$
$i' = 15 \ 32 \ 9,9$	$= 15 \ 31 \ 9,4$
$l' = 24 \ 11 \ 32,8$	$= 24 \ 3 \ 30,5$
$i'' = 24 \ 15 \ 6,0$	$= 24 \ 7 \ 3,5$
$l'' = 15 \ 4 \ 4,9$	$= 15 \ 4 \ 42,8$
$i''' = -11 \ 42 \ 42,8$	$= -11 \ 42 \ 2,5$
$l''' = -18 \ 42 \ 24,4$	$= -18 \ 34 \ 28,8$
$i^{iv} = 15 \ 1 \ 46,8$	$= 14 \ 53 \ 54,7$
$l^{iv} = 9 \ 45 \ 29,3$	$= 9 \ 42 \ 53,6$
$i^v = 9 \ 33 \ 21,3$	$= 9 \ 35 \ 58,0$
$l^v = 14 \ 42 \ 50,6$	$= 14 \ 43 \ 9,0$
$O^v = 5 \ 3 \ 24,2$	$= 5 \ 3 \ 42,6$
Distanze $k = 2,40303$	$= 2,42205$
$k' = 0,46049$	$= 0,46655$
$k'' = 3,16474$	$= 3,14431$
$k''' = -0,93773$	$= -0,96160$
$k^{iv} = -50,2177$	$= -87,9856$
$k^v = 0,99724$	$= 0,99622$
Errore di fig. = 0,00301	

Terza disposizione. Raggi prossimi all'asse

Medj	Rossi	aberr. di rifrangib.
$k = 2,19645$	$= 2,21389$	
$k' = 0,49886$	$= 0,50463$	
$k'' = 3,12392$	$= 3,10628$	
$k''' = -1,00664$	$= -1,03145$	
$k^{iv} = +4,05540$	$= +3,96040$	
$k^v = 0,99179$	$= 0,99147$	$= 0,00032$

Raggi incidenti in 0,000

Angoli	$i = 6^\circ 47' 35'',7$	$= 6^\circ 47' 35'',7$
	$l = 4\ 26\ 2,7$	$= 4\ 27\ 9,4$
	$i' = 15\ 7\ 52,7$	$= 15\ 6\ 46,3$
	$l' = 23\ 32\ 21,4$	$= 23\ 24\ 22,0$
	$i'' = 24\ 13\ 35,5$	$= 24\ 5\ 35,1$
	$l'' = 15\ 3\ 10,8$	$= 15\ 3\ 49,5$
	$i''' = -11\ 45\ 19,2$	$= -11\ 44\ 36,4$
	$l''' = -18\ 46\ 39,8$	$= -18\ 38\ 38,6$
	$i^{iv} = 18\ 46\ 39,8$	$= 18\ 38\ 38,6$
	$l^{iv} = 12\ 8\ 42,9$	$= 12\ 6\ 42,2$
	$i^v = 7\ 17\ 56,8$	$= 7\ 19\ 53,6$
	$l^v = 11\ 12\ 31,8$	$= 11\ 12\ 41,8$
	$O^v = 5\ 6\ 48,3$	$= 5\ 6\ 58,8$
Distanze	$k = 2,18989$	$= 2,20720$
	$k' = 0,46265$	$= 0,46872$
	$k'' = 3,22435$	$= 3,20223$
	$k''' = -0,92895$	$= -0,95256$
	$k^{iv} = 4,25959$	$= 4,14699$
	$k^v = 0,99459$	$= 0,99400$
Errore di fig.	$= 0,00280$	

152. Dall'esame dei precedenti prospetti chiaramente si scorge essere all'incirca indifferente la scelta della seconda o della terza disposizione; poichè sì nell'uno che nell'altro caso risultò piccolissima la residua aberrazione di rifrangibilità, e perciò le grossezze delle lenti hanno

per questa parte poca influenza. Ma troppo forte è l'errore residuo di sfericità, e questo deve in gran parte attribuirsi alla soverchia apertura data all'obbiettivo dietro il precetto di Eulero; ed in fatti gli angoli sotto i quali i raggi di luce incontrano i cateti d'incidenza in luogo di essere minori, o presso a poco uguali a 15° , oltrepassano eziandio 24° , donde accade che i termini trascurati nell'espressione dell'aberrazione longitudinale esercitano una sensibile influenza, nè si possono del tutto omettere. Sarà quindi opportuno dare a questi obbiettivi una minore apertura, e siccome gli angoli l' , l'' molto si avvicinano all'eguaglianza, potremo regolare negli obbiettivi triplicati le aperture come nei duplicati, dietro la condizione che l'angolo l' non superi 15° . Si troverà così

$$i = \frac{15^\circ}{\sqrt{m+1}} \quad (\S \text{ 122}), \text{ da cui fatto } m = 1,53 \text{ si ot-}$$

terrà per la seconda disposizione (supponendo la distanza focale come sopra = 1000) $i = 3^\circ 56'$, l'apertura = 114,5; la grossezza poi della prima lente sarà = 6,2 circa; quella della terza lente = 3,9. Per la terza disposizione risulterà $i = 4^\circ 25', 2$, l'apertura = 117,3; le grossezze della prima e terza lente saranno presso a poco = 6,5.

Regolate in tal guisa le aperture, gli errori di sfericità diminuendo come i quadrati delle medesime si ridurranno minori della metà dei precedenti, e poichè la grossezza delle lenti risulta notabilmente più piccola, la confusione derivante da questa sorgente sarà pure molto minore, e tollerabile anche nei più forti ingrandimenti.

Del resto non vogliamo omettere di avvertire che la bontà di un obbiettivo dipende dall'esattezza del lavoro, e dalla precisione con cui saranno stati determinati i valori degl'indici di rifrazione e di dispersione. Sarebbe quindi superfluo il diffondersi troppo minutamente a togliere ogni aberrazione in un caso particolare, dovendosi rilasciare alla diligenza del fabbricatore, alla sua pratica ed intelligenza un tale travaglio pelle speciali qualità di vetri che vorrà impiegare.

Calcolo degli obbiettivi acromatici triplicati, quando si tiene conto della distanza dei centri delle lenti.

153. Ritenute le denominazioni tutte del § 147, pongasi ad imitazione del caso analogo per gli obbiettivi duplicati $\frac{a}{b} = -P$, $\frac{\beta}{c} = -Q$, dove si dà ai secondi membri il segno meno per distruggere il simile segno contenuto in b ed in β .

Supponendo uguali e rappresentate da ω le distanze dei centri della prima dalla seconda lente, e della terza dalla quarta, avremo $b\left(1 + \frac{a}{b}\right) = \omega$, $c\left(1 + \frac{\beta}{c}\right) = \omega$, dalle quali tosto si ottengono le seguenti equazioni

$$b = -\frac{\omega}{P-1}; \quad a = p = \frac{P\omega}{P-1};$$

$$c = -\frac{\omega}{Q-1}; \quad \beta = \frac{Q\omega}{Q-1}.$$

Introdotti questi valori nelle equazioni (1) del § 143, otterremo le distanze focali delle lenti nel modo seguente

$$p = \frac{P\omega}{P-1}; \quad q = \frac{-Q\omega}{1-Q(2-P)}; \quad r = \frac{\omega}{1+\omega-Q}.$$

Sostituiti nell'equazione (3) i valori di $\frac{a}{b}$, $\frac{\beta}{c}$, e di p , q , r , essa cangiasi tosto con ovvie riduzioni nella seguente (rammentando essere $N = \frac{\zeta'}{\zeta}$)

$$PQ'(P-1) - NQ\{1-Q(2-P)\} + 1 - Q + \omega = 0. \quad (A)$$

Passiamo ora a considerare le equazioni (6) relative al contorno colorato. La seconda di esse diviene

$$\frac{\pi'}{\pi} = -\frac{PQ+1}{Q} \frac{q}{r},$$

e la prima si riduce ad

$$N(r-\omega) = \frac{\pi'}{\pi} r = -\frac{PQ+1}{Q} q.$$

Sostituendo in questa equazione i valori superiori di r e di q , e togliendo le frazioni, si ottiene

$$N(Q-\omega)\{1-Q(2-P)\}-(PQ+1)(1-Q+\omega)=0 \quad (B)$$

Se ora riguardiamo ω come dato, le due equazioni (A), (B) risolte convenientemente daranno P , Q , dai quali sono determinate le distanze focali delle lenti in modo da distruggere l'aberrazione longitudinale di rifrangibilità, ed il contorno colorato, e più non resterà che determinare la figura conveniente delle lenti per distruggere l'aberrazione di sfericità; ma avanti tutto conviene risolvere le due nominate equazioni.

154. Il numero ω , che rimane arbitrario, si deve prendere piccolo quanto è possibile, affinchè le distanze focali delle lenti non sieno troppo diminuite. Negli esempj superiori la distanza dei centri delle lenti sarebbe circa 11 parti della distanza focale dell'obbiettivo composto, le quali costituiscono $\frac{1}{30}$ di q . Supponendo le lenti isosceli, e dando alla lente concava una grossezza uguale a quella delle altre, tale numero risulterebbe $= \frac{1}{15} q$. Eulero e Klügel per lasciare fra esse un piccolo spazio arbitrario da distruggere i piccoli errori di costruzione lo posero $= \frac{1}{12} q$; noi lo faremo $= h q$, rilasciando la determinazione della piccola frazione h in arbitrio del fabbricatore secondo i diversi casi particolari. Avremo pertanto (osservando che q è negativo, ed ω positivo)

$$\omega = - h q = \frac{h Q \omega}{1 - Q(2 - P)},$$

donde risulta l'equazione fra P e Q

$$1 - Q(2 - P) = h Q \quad . \quad . \quad (C)$$

Per eseguire ora più facilmente le eliminazioni, in luogo dell'equazione (B) adopereremo la somma delle due equazioni (A), (B), la quale in virtù dell'equazione (C) prende la forma

$$PQ(PQ-1) - PQ\omega - NhQ\omega = 0 \quad . \quad (D)$$

Ora dall'equazione (C) si ottiene $P = \frac{(2+h)Q-1}{Q}$, e

quindi $P - 1 = \frac{(1+h)Q-1}{Q}$, $PQ = (2+h)Q-1$.

In virtù di questi valori le due equazioni (A) e (D) si cangiano rispettivamente in

$$\{(2+h)Q-1\}\{(1+h)Q-1\}-NhQ'+1-Q+\omega=0,$$

$$\{(2+h)Q-1\}\{(2+h)Q-2\}-(2+h)Q\omega-NhQ\omega+\omega=0,$$

le quali sviluppate ed ordinate opportunamente divengono

$$(2+3h-Nh+h')Q'-2(2+h)Q+2+\omega=0$$

$$(4+4h+h')Q'-3(2+h)Q+2-(2+h+Nh)Q\omega+\omega=0.$$

Sottraendo ora dalla seconda di queste equazioni la prima, e dividendo il residuo per Q , si otterrà l'equazione semplicissima

$$\omega = Q - \frac{2+h}{2+h+Nh} \dots (E)$$

Sostituendo nella prima delle precedenti equazioni questo valore di ω , si avrà per determinare Q l'equazione di secondo grado

$$(2+3h-Nh+h')Q'-(3+2h)Q+\frac{2+h+2Nh}{2+h+Nh}=0 \quad (F)$$

Dovrà risolversi con accuratezza questa equazione, e delle due radici si prenderà quella che rende $P-1$ quantità positiva, ossia quella che trovasi maggiore di $\frac{1}{1+h}$.

Ottenuto Q , l'equazione (E) darà ω , che pure dovrà calcolarsi scrupolosamente per determinare q esattamente; indi si avrà P dall'equazione

$$P = \frac{(2+h)Q-1}{Q} \dots (G)$$

155. Restano a determinarsi le distanze focali p, q, r , e le quantità b, β, c . Si potrebbero in vero queste quantità calcolare dietro le loro espressioni date al § 153; ma venendo determinate per frazioni aventi piccoli numeratori e denominatori, divengono poco sicure. Se ne può ordinare il calcolo nel modo seguente.

Si calcoli q dall'equazione di posizione $q = -\frac{\omega}{h}$; in seguito l'equazione

$$N(r - \omega) = - \frac{PQ + 1}{Q} q = - (2 + h) q, \text{ dar\`a}$$

$$r = \omega - \frac{2 + h}{N} q = - \frac{2 + h + Nh}{N} q \quad . \quad (H)$$

Si avr\`a p dall'equazione

$$p = \frac{P\omega}{P-1} = \frac{(2+h)Q-1}{(1+h)Q-1} \omega.$$

Per ultimo sar\`a $b = - \frac{P}{P}$, $\beta = \frac{bq}{b-q}$, $c = - \frac{\beta}{Q}$.

156. Le formule del § precedente richiedono nel calcolo una scrupolosa esattezza, soprattutto se ω ed h sieno molto piccoli. Sar\`a perci\`o partito migliore di ordinare il calcolo come pel caso in cui queste quantit\`a si riguardavano come nulle, al che facilmente si perviene dietro il metodo che ci facciamo ad esporre. Riprendasi l'equazione (3) § 147, e dopo averla divisa per  $\zeta$  vi si pongano  $\frac{\alpha}{b} = -P$ ,  $\frac{\beta}{c} = -Q$ , con che diverr\`a

$$P'Q' \frac{1}{p} + NQ' \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 0;$$

quindi se ne ottiene

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = - \frac{N}{P'} \frac{1}{q} + \frac{P'Q' - 1}{P'Q'} \frac{1}{r}.$$

Scrivendo nel secondo membro invece di $\frac{1}{r}$ il suo valore preso dall'equazione (H), e ponendo per brevitt\`a

$$N' = \frac{N}{P'} \left(1 + \frac{P'Q' - 1}{Q'(2+h+Nh)} \right), \text{ si avr\`a}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = - N' \frac{1}{q} \quad . \quad . \quad . \quad (L)$$

In fine delle equazioni del § 153 facilmente rilevasi

$$\frac{1}{r} + \frac{Q}{q} + \frac{PQ}{p} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad (M)$$

la quale congiunta con le equazioni (H) ed (L) dar\`a i valori delle distanze focali p, q, r con semplici operazioni dipendenti da eliminazioni d'incognite al primo grado.

157. Per dare un esempio numerico intorno a questo

argomento fingeremo $N = \frac{4}{3}$, ed assumeremo $h = \frac{1}{12}$.

L'equazione (F) diverrà

$$8137 Q' - 12008 Q + 3984 = 0,$$

che risolta dà $Q = \frac{6004 \pm \sqrt{(3630208)}}{8137}$.

Affinchè $P - 1$ risulti positivo, dovrà essere $Q > \frac{12}{13}$, e perciò converrà prendere il segno superiore. Si troverà in tal guisa $Q = 0,9720126$; in seguito

$$\omega = Q - \frac{75}{79} = 0,0226455, \text{ e } P = \frac{25}{12} - \frac{1}{Q} = 1,054543;$$

dei quali numeri i logaritmi saranno

$$\log Q = 9,9876719; \log P = 0,0230643; \log \omega = 8,3549819.$$

Essendo nel caso presente h una frazione abbastanza grande, potremo usare i precetti del § 155. Sarà in conseguenza

$$q = -12 \omega = -0,27175; \quad r = \omega - \frac{25}{16} q = 0,44725;$$

$$p = \frac{P \omega}{P - 1} = 0,43784.$$

Si calcoleranno per ultimo le distanze di riunione b , β , c , e si otterrà $b = -0,41520$; $\beta = -0,78649$; $c = 0,80914$, essendo $\gamma = 1$.

Siccome per il calcolo della figura delle lenti giova avere i logaritmi delle precedenti quantità, così crediamo opportuno di qui riferirli.

$$\log p = 9,6413286 + \quad \log b = 9,6182643 -$$

$$\log q = 9,4341631 - \quad \log \beta = 9,8956935 -$$

$$\log r = 9,6505503 + \quad \log c = 9,9080216 +$$

158. Più non resta che determinare la figura delle lenti in modo che sia distrutta l'aberrazione dipendente dalla sfericità. A tale oggetto ridotti mediante i precedenti valori a numeri i coefficienti delle indeterminate λ , λ' , λ'' nell'equazione (4) § 147, si troverà

$\lambda - 2,98837 \lambda' + 0,84994 \lambda'' - 0,12482 = 0$, nella quale due indeterminate rimangono al nostro arbitrio.

Affinchè la seconda lente, che ha la minore distauza

focale, acquisti la maggiore apertura possibile, determineremo λ' in modo che risulti isoseele. Così avremo § 106

$$\sqrt{(\lambda' - 1)} = \frac{\sigma' - \rho'}{\tau} \left(\frac{1}{2} - \frac{q}{b} \right); \text{ per\`o } \lambda' = 1,064381.$$

Degli altri due numeri λ , λ'' uno rimane arbitrario; vedemmo (§ 150) che fingendoli uguali, la prima superficie della terza lente acquistava un raggio minore di quello della lente concava, e nel caso presente sussistendo ancora la stessa circostanza, noi rigetteremo questa disposizione, e riterremo le altre due, determinando 1.° λ'' in modo che la terza lente sia isoseele; 2.° che risultino perfettamente uguali i raggi delle superficie a contatto.

1.° Supponendola isoseele avremo

$$\sqrt{(\lambda'' - 1)} = \frac{\sigma - \rho}{\tau} \left(\frac{1}{2} - \frac{r}{c} \right), \text{ e per\`o } \lambda'' = 1,006679.$$

Sostituiti questi valori di λ' , λ'' nella superiore equazione otterremo $\lambda = 2,44996$.

Per ultimo istituendo il calcolo delle equazioni (2) si troverà per la prima lente $R = 0,80191$; $R' = 0,32657$.

I raggi delle altre due lenti isoseeli si troveranno più facilmente dalle equazioni

$$R'' = 2(m' - 1)q, \quad R'' = 2(m - 1)r,$$

le quali nel caso presente danno

$$R'' = -0,31523; \quad R'' = 0,47408.$$

Quindi si modellerà la costruzione dell'obbiettivo aeromatico sulle seguenti dimensioni, supponendo la sua distanza focale divisa in 1000 parti.

Lenti	I.	II.	III.
Distanza focale	438	— 272	447
Raggio della 1. ^a superficie .	802	— 315	474
della 2. ^a superficie .	327	— 315	474

Distanza dei centri delle lenti = 23

Apertura totale . . . : . = 157

2.° Vogliasi rendere il primo raggio della terza lente $R'' = 0,31523$. Troveremo

$$\frac{1}{R''} = 1,94026 \pm \frac{\tau \sqrt{(\lambda'' - 1)}}{r};$$

$$\frac{1}{R''} = 2,27838 \mp \frac{7 \sqrt{(\lambda'' - 1)}}{r}.$$

Ponendo $R'' = 0,31523$, la prima di queste equazioni darà $\lambda'' = 1,77174$, dopo che si avrà $\lambda = 1,79970$.

Dietro questi numeri si avrà

$$R = 0,52582; \quad R' = 0,41514; \quad R'' = 0,95574.$$

Risulta da ciò che per la distanza focale 1000 si dovranno adoprare le seguenti dimensioni:

Lenti	I.	II.	III.
Distanza focale delle lenti .	438	— 272	447
Raggio della 1. ^a superficie .	526	— 315	315
della 2. ^a superficie .	415	— 315	956

La distanza dei centri delle lenti = 23

L'apertura = 157

Il fin qui detto basti per la teoria degli obbiettivi acromatici triplicati; chi desiderasse una maggiore estensione dovrà consultare le opere più volte citate, ed inoltre una interessantissima Memoria del celebre signor cav. Oriani inserita nel volume III. della Società Italiana, ove espone la dottrina di un cannocchiale acromatico, il cui obbiettivo formato di tre lenti isosceli rendesi molto commendevole per la facilità della sua costruzione.

159. Porremo fine alla teoria degli obbiettivi acromatici con alcune osservazioni di molto interesse per gli ottici pratici, i quali vogliono nella loro costruzione giungere a quel grado di perfezione che può sperarsi dalla teoria superiormente esposta con sufficiente estensione.

1.° Quando i raggi delle superficie concave e convesse rivolte l'una verso l'altra sono uguali, o molto si avvicinano all'eguaglianza, sicchè le superficie stesse sieno per la loro piccola estensione ridotte ad un contatto quasi perfetto, dicesi lodevole cosa il frappare una leggera colla chiara formata di una sostanza molto refringente affine di escludere i minimi strati aerei, e d'impegnare la luce ad attraversare le successive lenti; imperciocchè un sottilissimo strato d'aria di qualche milionesimo di pollice sarebbe bastante a produrre quegli anelli colorati che fu-

rono da Newton scoperti, e dei quali leggesi la teoria nei trattati più accreditati di fisica. Negli obbiettivi tanto giustamente celebrati di Fraunhofer composti di due lenti vedesi evitato l'immediato contatto; poichè fra la lente concava e la lente convessa vi si osservano nella circonferenza alcuni piccoli pezzetti di foglia di stagno, i quali servono ad impedire il contatto verso il centro dell'obbiettivo, e tengono nel tempo stesso obbligate le lenti dentro l'anello che le unisce. Asseriscono gli scrittori di ottica essere molto noccevole alla chiarezza e bontà dell'obbiettivo la presenza di tali anelli colorati; ed in vero in tutti quelli che esistono in questo Osservatorio sortiti dalla fabbrica del lodato Fraunhofer non se ne scorge la più piccola traccia. Havvi però un eccellente obbiettivo acromatico a tre lenti di Dollond, la cui distanza focale è di 42 pollici, e l'apertura di 42 linee del piede di Parigi, che in precisione e chiarezza pareggia, e forse supera quelli di Monaco, e tuttavia mostra alcune sensibili tracce di anelli colorati quando riguardasi esternamente. Sarà tuttavia partito sicuro procurare di evitarli impiegando l'artificio di Fraunhofer, soprattutto se i raggi delle curvature non sieno assolutamente eguali.

2.° Il buon effetto di un obbiettivo acromatico dipende senza dubbio dalla precisione con cui sono costruite le lenti dietro i rapporti segnati dalla teoria, dalla perfetta omogeneità dei vetri in esso impiegati, e dalla esattezza degli indici di rifrazione e di dispersione assunti per il calcolo delle sue dimensioni. Ma richiedesi inoltre che le lenti tutte delle quali viene egli composto sieno *bene centrate*, cioè a dire che i centri delle loro diverse superficie trovinsi disposti in una medesima linea retta, che ne costituisce l'asse; ed a quest'ultima operazione dovrà impiegare il fabbricatore ogni diligenza, poichè gli errori di centratura producono una confusione intollerabile che si manifesta soprattutto nella osservazione delle piccole stelle doppie. Se un obbiettivo sia bene centrato si riconosce facilmente con un metodo semplicissimo immaginato e praticato dal ch. dott. Wollaston (*Trans. phil.* 1822.; *Connaiss. des temps* 1827. pag. 381.). Si applichi questo all'estremità del tubo, di cui ci dovremo servire per farne un cannocchiale; indi tolto l'oculare, se vi fosse, si

ponga in sua vece la fiammella di una candela, che si potrà far tenere da un assistente. Ritirandosi dalla parte dell'obbiettivo alla distanza di un piede, o poco più, si scorge una serie d'immagini della detta fiammella dentro il tubo, ed anche avanti l'obbiettivo prodotte dalla riflessione della luce dalle diverse superficie del vetro. Sarebbe facile assegnare la posizione ed il numero di queste immagini; per noi basta riflettere che essendo prodotte da superficie, le quali fanno le veci di altrettanti specchi, devono trovarsi nel loro asse comune; quindi se esse saranno in linea retta, l'obbiettivo sarà centrato; in caso diverso conviene muovere dentro l'anello dell'incassatura le lenti finchè questa condizione sia adempita. Si giudica facilmente ad occhio nudo, o con l'aiuto di una lente, se tutte le immagini sono in una sola linea retta, e le più piccole deviazioni tosto si rendono sensibili. Io ho sperimentato con questo mezzo li diversi obbiettivi dell'Osservatorio, e lo trovo di facile e sicura applicazione. Nel poco fu nominato obbiettivo di Dollond si scorgono 10 immagini, quattro delle quali sono fuori dell'obbiettivo, e sei dentro, tutte esattamente disposte in linea retta. Con un obbiettivo duplo di Fraunhofer di 48 pollici se ne vedono quattro; una esterna, e tre interne; è da notarsi che la quarta è contigua alla terza; e perciò a prima vista si stimano tre; questa risulta perciò delle altre più splendente, e sembra anche un pocolino più alta, forse per un minimo difetto di centratura.

3.° Nel calcolo delle aperture ci siamo in modo condotti che nessun angolo d'incidenza o rifratto superasse 15°, ed abbiamo dietro ciò trovato che un obbiettivo dop-

pio composta un'apertura di circa $\frac{1}{12}$ della sua distanza

focale, mentre in un obbiettivo triplo può giungere a circa la nona parte. Si grandi aperture però non si riscontrano nei cannocchiali sortiti dalle più rinomate fabbriche; almeno in quelli destinati per i maggiori stromenti di astronomia, e per le più delicate osservazioni. Gli obbiettivi a due lenti di Fraunhofer al numero di quattro esistenti in questo Osservatorio hanno costantemente l'apertura

uguale ad $\frac{1}{16}$ della distanza focale, e la stessa propor-

zione circa si osserva nei minori cannocchiali del circolo ripetitore e del teodolito, che hanno una distanza focale di 15 a 18 pollici. L'obbiettivo triplicato di Dollond ha un'apertura di 42 linee, che corrisponde ad $\frac{1}{12}$ della sua distanza focale; ed il più grande obbiettivo che si conosca fino al presente costruito a Monaco per l'Osservatorio di Dorpat in Russia, di cui molto lodasi la bontà e precisione dall'astronomo signor Struwe, ha 160 pollici di distanza focale, e 9 di apertura, lo che corrisponde ad $\frac{1}{13}$ circa. Questa diminuzione data da valentissimi ottici teorici e pratici alle aperture deve in parte ripetersi dalla difficoltà di ottenere grossi pezzi di vetro puro ed omogeneo dalle fornaci, ma io reputo anche doversi ripetere dalla confusione che sorge per gli errori residui di rifrangibilità e di figura nei forti ingrandimenti, la quale non è certamente sfuggita alla loro sagacità ed alla loro esperienza.

4.° Sarà lodevole l'unire le lenti destinate a formare un obbiettivo acromatico dentro un'incassatura di ottone munita delle opportune viti, affinchè occorrendo si possa decomporre per ripulirle, se avvenga che per l'umidità dell'atmosfera le interne superficie contraggano qualche macchia, come appunto vedesi praticato negli obbiettivi del più volte lodato Fraunhofer. Tale operazione però non si dovrà intraprendere se non quando insorga assoluto bisogno, ed in tal caso si procederà nel modo seguente prescritto dallo stesso ottico per i suoi obbiettivi (Ved. *Schümacher, Astronom. Nachrichten III. pag. 187.*). 1.° Si leveranno le viti che obbligano l'anello di ottone alla incassatura delle lenti, e tolto l'anello anzidetto, si leveranno leggermente le lenti stesse, che vedonsi separate l'una dall'altra da tre sottili foglioline di stagnola di uguale grossezza distribuite a 120° di distanza intorno alla loro periferia, e saranno queste il più delle volte l'una all'altra aderenti per mezzo delle dette foglioline. 2.° Prima di separarle conviene accuratamente segnarle alla loro esterna circonferenza per ricomporle poi alla stessa maniera; imperciocchè il girarle una sull'altra

potrebbe portare qualche leggero nocumento alla bontà dell'obbiettivo. In seguito s'inumidiranno un pocolino le foglie di stagno ad oggetto di potere senza sforzo alcuno separare le lenti. 3.° Separate che sieno, si laveranno con una tioletta sottile di lino intrisa nello spirito di vino, ed in seguito si netteranno con un altro pezzetto pure di sottile lino lavato nell'acqua di creta e poi asciugato. Per ultimo con un sottilissimo pennello si allontanerà leggermente la polvere. 4.° Per ricomporre l'obbiettivo si apparecchieranno tre piccoli pezzetti di foglia di stagno della larghezza di circa due linee, e di tale lunghezza che non oltrepassino la larghezza dell'anello d'incassatura; si deve avere somma cura che questi sieno esattamente della stessa grossezza, altrimenti originerebbero una inclinazione nelle interne superficie dell'obbiettivo che produrrebbe un difetto di centratura sommamente nocivo; si dividerà la periferia in tre parti uguali, e vi si applicheranno i detti pezzetti alla parte concava della lente di flint dopo averli leggermente umettati con una soluzione di gomma. Si appoggerà e comprimerà leggermente sopra le stesse foglie la lente di crown dalla parte più convessa in modo che vicendevolmente corrispondano i segni praticati a bel principio nell'esterna circonferenza dell'obbiettivo. 5.° Apparecchiate in tal guisa le cose si riporrà l'obbiettivo entro la sua cassa circolare, la quale è apparecchiata in modo che appoggi soltanto in tre punti fra loro equidistanti, e si avrà cura di fare sì che gli appoggi cadano sui luoghi delle foglie di stagno. Vi si porrà poi l'anello di ottone del pari munito di tre appoggi fra loro equidistanti, che si faranno corrispondere ai precedenti, e si fisserà con le sue viti al posto in modo che le pressioni sulle lenti sieno ugualmente distribuite. 6.° Ricomposto l'obbiettivo si dovrà diligentemente esaminare se le foglie di stagno fraposte risultarono di eguale grossezza, lo che si riconoscerà istituendo il sopra indicato esame per la centratura delle lenti. Si potrà anche riconoscere la esatta eguaglianza di dette foglie nel seguente modo per quegli obbiettivi, nei quali le due superficie interne hanno curvature opposte pochissimo fra loro diverse. Essendo in essi la distanza delle lenti alla circonferenza uguale alla differenza dei seni versi delle loro curvature, se la grossezza

della foglia di stagno uguagli tale differenza, o pochissimo la superi, nel centro saranno ridotte ad un assoluto contatto, o sommamente fra loro vicine, e perciò vi sarà una macchia contornata da anelli colorati. Se questa macchia trasportasi dal centro dell'obbiettivo verso la periferia, il massimo ravvicinamento delle lenti sarà fuori del centro stesso, e perciò le foglie non saranno uguali, e dovranno esserc cambiate fintantochè essa venga a fissarsi al mezzo dell'obbiettivo. Questo metodo è molto raccomandato da Fraunhofer per i suoi obbiettivi, come conducente ad esattissimi risultamenti; devo tuttavia avvertire di non avere potuto distinguere in quelli della sua costruzione esistenti nell'Osservatorio di Padova alcuna traccia di simile macchia colorata, lo che probabilmente dipende da una soverchia grossezza delle foglie di stagno, la quale impedisce quel grado di avvicinamento che si richiede per la sua formazione.

APPENDICE

in cui si espone un metodo indiretto per determinare le dimensioni di un obbiettivo acromatico a due lenti.

160. Abbiamo riferito al § 139 il metodo proposto da Klügel per determinare le dimensioni di un obbiettivo acromatico, ed al § 140 abbiamo accennato che in questo metodo si trascura l'aberrazione di figura prodotta dall'ultima superficie, ed auco indicato come con pochi tentativi, e con una facile interpolazione giungere si possa a fare sparire questo leggero errore. In seguito il chiarissimo signor Littrow, direttore dell'I. R. Osservatorio di Vienna, mi ha gentilmente comunicato un suo modo indiretto di determinare i raggi delle superficie di un obbiettivo, nel quale si ha riguardo alla grossezza della prima lente da esso assunta isoscele, trascurando quella della seconda; la quale ipotesi è, come si vede, il più delle volte trascurabile; imperciocchè tenuissima si può rendere la grossezza di una lente concava, ed inoltre piccolissima è la confusione che ne risulta, a meno che non fosse k'' una piccola frazione (§ 135), il quale caso si deve accuratamente evitare.

Siccome i metodi indiretti hanno nelle operazioni numeriche il sommo vantaggio di essere congiunti con la riprova, ed è d'altronde la costruzione degli obbiettivi acromatici di sommo interesse nella teoria dei cannocchiali, così crediamo opportuno di aggiungere eziandio il metodo praticato dal signor Littrow, che noi ricaveremo dalle formule generali date nel Capitolo precedente per qualunque rapporto piaccia di assumere fra i raggi della prima lente. Per ultimo riferiremo la tavola da questo celebre Astronomo costruita, mediante la quale qualunque artefice può con semplici e facili operazioni determinare le dimensioni tutte di un obbiettivo pel caso in cui la prima lente di crown si faccia da ambe le parti ugualmente convessa.

161. Si riprenda l'equazione (A) del § 135, facendovi

$v' = 0$, e per brevità ponendo $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \rho$; $\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \rho'$,

diverrà $\frac{1}{k''} = (m-1)\rho - (m'-1)\rho' + \frac{mv}{k'}$.

Per eliminare k dal secondo membro, ed esprimerlo per ρ , si osservi che $\frac{m}{k'} = \frac{(m-1)'}{m} \cdot \frac{1}{r'}$; ponendo pertanto

to $\frac{r}{r'} = h$, si avrà $\frac{1}{r} = \frac{\rho}{h+1}$, e perciò

$\frac{mv}{k'} = \frac{(m-1)'}{m} \cdot \frac{v\rho'}{(h+1)'}$; quindi la precedente equazione diverrà

$$\frac{1}{k''} = (m-1)\rho - (m'-1)\rho' + \frac{(m-1)'}{m} \cdot \frac{v\rho'}{(h+1)'} \quad (B)$$

la quale deve dare lo stesso valore di k'' per i raggi di qualunque natura. Supponendo pertanto che m ed m' sieno gl'indici di rifrazione per i raggi medj nel crown e nel flint, μ e μ' gli stessi indici per i raggi rossi, avremo del pari

$$\frac{1}{k''} = (\mu-1)\rho - (\mu'-1)\rho' + \frac{(\mu-1)'}{\mu} \cdot \frac{v\rho'}{(h+1)'}$$

le quali sottratte una dall'altra daranno fra ρ , ρ' la seguente relazione

$$(m-\mu)\rho - (m'-\mu')\rho' + \frac{v\rho'}{(h+1)'} \left(\frac{(m-1)'}{m} - \frac{(\mu-1)'}{\mu} \right) = 0.$$

Essendo $m - \mu$, $m' - \mu'$ piccole frazioni, le porremo $= d m$, $d m'$; in seguito osserveremo che

$$\frac{(m-1)'}{m} - \frac{(\mu-1)'}{\mu} = m - \mu + \frac{1}{m} - \frac{1}{\mu}, \text{ ovvero pros-}$$

simamente $= d m - \frac{d m}{m'} = \frac{m' - 1}{m'} d m$. Se ora si sostituiscono questi valori nella precedente equazione, si divide per $d m'$, e si pone $\frac{d m}{d m'} = \pi$, si troverà

$$\xi' = \pi \xi + \frac{m' - 1}{m'} \pi \frac{\xi' v}{(h+1)'} \dots (C)$$

Si assuma ora ad unità di misura la distanza focale dei raggi medj nella prima lente, cioè si ponga

$$(m-1)\xi = 1; \text{ sarà } \xi = \frac{1}{m-1}, \text{ e l'equazione (C) darà}$$

$$\xi' = \frac{\pi}{m-1} \left(1 + \frac{(m+1)}{m'} \frac{v}{(h+1)'} \right) = M \pi,$$

ponendo cioè il coefficiente

$$\frac{1}{m-1} \left(1 + \frac{m+1}{m'} \frac{v}{(h+1)'} \right) = M. \dots (D)$$

Introducendo nell'equazione (B) i valori precedenti di ξ , ξ' , si ottiene

$$\frac{1}{k''} = 1 - (m' - 1) M \pi + \frac{v}{(h+1)'} m. \dots (E)$$

la quale dà la distanza focale dell'obbiettivo composto per i raggi prossimi all'asse.

162. Resta ora a determinare la figura delle lenti; quella della prima rimane arbitraria, se non si voglia avere riguardo alla differenza fra l'errore di figura relativa ai raggi rossi ed ai raggi medj; quindi se vorremo renderla isoscele per la facilità della costruzione porremo $h = 1$, ed in generale per ottenere la massima apertura faremo quelle considerazioni che abbiamo riferite al § 124; ma per i più forti ingrandimenti sembra doversi assumere per h un valore > 1 , per es. $\frac{5}{2}$, affinchè il concorso dei raggi rossi estremi molto si avvicini al concorso dei raggi medj. Stabilito h si avrà

$$r = (h+1)(m-1); \quad r' = \frac{h+1}{h} (m-1).$$

Per determinare i raggi della seconda lente si prenda a considerare un fascetto parallelo all'asse, il quale cada verso l'estremità dell'obbiettivo in una distanza dal centro per es. di 0,040, ovvero 0,045; e stabilita la grossezza della prima lente si calcolino con accuratezza mediante le equazioni (1), (2), (3), (4), (5) § 120 le quantità k , O per i raggi medj, le quali devono riguardare come costanti nelle operazioni seguenti. Si dovranno per R , R' adottare quei valori che soddisfanno alle seguenti equazioni

$$(1) \quad \frac{1}{R} = -\frac{1}{R'} + M\pi$$

$$(2) \quad \text{sen } i'' = \frac{k' + R}{R} \text{sen } O'$$

$$(3) \quad \text{sen } l'' = \frac{\text{sen } i''}{m'} \quad (m' \text{ l'indice di rifrazione per i raggi medj nella 2.ª lente})$$

$$(4) \quad O'' = l'' - i'' + O'$$

$$(5) \quad k'' = -R + \frac{R \text{sen } l''}{\text{sen } O''}$$

$$(6) \quad \text{sen } i''' = \frac{R' - k''}{R'} \text{sen } O''$$

$$(7) \quad \text{sen } l''' = m' \text{sen } i'''$$

$$(8) \quad O''' = l''' - i''' + O''$$

$$(9) \quad k''' = R' - \frac{R' \text{sen } l'''}{\text{sen } O'''}$$

dalla quale ultima equazione k''' deve risultare identico a quello dato dall'equazione (E). La prima di queste equazioni equivale alla $\rho' = M\pi$ trovata di sopra, riflettendo

che $\rho' = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'}$; le altre sono quelle stesse del § 120, posto $\nu' = 0$.

Prendendo a piacere uno dei due raggi R , ovvero R' , l'equazione (1) darà l'altro; indi il successivo calcolo delle seguenti ci farà conoscere k''' , il quale se risulta uguale a quello ottenuto dall'equazione (E), ci assicurerà che i valori di R ed R' sono i veri; in caso diverso si andranno variando finchè questa condizione sia adempita. Se preventivamente coi precetti del § 118 siansi calcolati i va-

lori prossimi di R e di R' , con due ipotesi sole ed una semplice interpolazione si potrà giungere a scuoprire la vera forma dell'obbiettivo acromatico.

163. Il calcolo degli obbiettivi con questo metodo si può molto abbreviare (qualora si voglia ritenere un determinato rapporto fra i raggi della prima lente) coll'ajuto di una tavoletta, la quale per una particolare incidenza dia i costanti k , O' per i diversi valori di m .

Così fingendo la prima lente isoscele, $i = 10^\circ$, $v = 0,01$, si hanno k , O' dietro la seguente tavoletta calcolata dal signor Littrow, alla quale ho aggiunto nell'ultima colonna i valori di M calcolati dietro la equazione (D), ponendo $v = 0,01$.

m	k	O'	M
1,50	0,94613	$10^\circ 18' 23'',8$	2,005556
1,51	0,94497	$10 \quad 31 \quad 7,9$	1,966180
1,52	0,94380	$10 \quad 43 \quad 53,0$	1,928321
1,53	0,94261	$10 \quad 56 \quad 39,1$	1,891891
1,54	0,94141	$11 \quad 9 \quad 26,5$	1,856811
1,55	0,94019	$11 \quad 22 \quad 14,9$	1,823007
1,56	0,93895	$11 \quad 35 \quad 4,6$	1,790411

Sia per esempio $m = 1,53$, $m' = 1,58$, $d m = 0,006$, $d m' = 0,009$; quindi $\pi = \frac{d m}{d m'} = \frac{2}{3}$; $v = 0,01$, $i = 10^\circ$.

Sarà $r = r' = 2(m - 1) = 1,06$. Dietro la tavola precedente si avrà $k = 0,94261$, $O' = 10^\circ 56' 39'',1$. Si troverà $M \pi = 1,2612603$.

L'equazione (E) dà $k''' = 3,702292$. Dietro ciò si troverà $R = -1,04394$, $R' = -3,296512$.

In questo obbiettivo i raggi medj remoti si riuniscono ad una distanza $= 3,702231$; quindi l'errore residuo di figura è di 0,000061.

L'errore di rifrangibilità è pure in esso egregiamente distrutto; imperciocchè calcolando dietro la equazione (E)

i valori di k''' per i raggi medj, rossi e violetti, ed assumendo

$$m = 1,53, \quad m' = 1,58 \quad \text{si ha } k''' = 3,70229 \text{ medj}$$

$$m = 1,536, \quad m' = 1,589 \quad . . . \quad k''' = 3,70229 \text{ violetti}$$

$$m = 1,524, \quad m' = 1,571 \quad . . . \quad k''' = 3,70228 \text{ rossi.}$$

La totale apertura trovasi

$2 k''' \tan g O''' = 2 k''' \tan g 2^\circ 51' 16'',6 = 0,09973 k'''$;
quindi in un obbiettivo di 5 piedi risulta = 5,984 pollici,
maggiore cioè di quella che si osserva negli obbiettivi di
questa dimensione finora costruiti.

Un altro singolare esempio ha calcolato sulle stesse
formule il signor Littrow adottando i dati seguenti

$$m = 1,53, \quad m' = 1,60, \quad d'm = 0,004, \quad d'm' = 0,008;$$

quindi $\pi = 0,5$. Ritenendo $i = 10^\circ$, $v = 0,01$, trova le
seguenti dimensioni

$r = r' = 1,06$, $R = -1,04266$, $R' = +76,100952$;
cosicchè la prima lente è convessa ed isoscele; la seconda
concavo-convessa, con la parte convessa quasi piana
rivolta verso l'oculare.

In questo obbiettivo

i raggi medj remoti dall'asse danno $k''' = 2,30375$

i raggi prossimi medj = 2,30379

violetti = 1,30379

rossi. = 1,30378

L'apertura poi risulta smisurata, ed uguale a

$2 k''' \tan g 4^\circ 34' 58'',5$, ovvero = 0,6031 k''' , di modo che
per un obbiettivo di 5 piedi sarebbe = 9,619 pollici;
donde apparisce che si può ritenere un minore valore di
 i , e tuttavia avere un cannocchiale di grande apertura,
nel quale in conseguenza gli errori residui di figura non
avranno che una minima influenza.

164. Il calcolo di un obbiettivo dietro le formule pre-
cedenti è abbastanza spedito e semplice per coloro che
sono abituati al calcolo numerico; deve però riuscire non
poco imbarazzante per un artefice che non abbia presenti
tutti gli artificj dell'aritmetica superiore, e non sia nella
teoria bene instruito. Per togliere questa difficoltà, la
quale sarebbe invero insormontabile alla classe degli ot-
tici pratici, il signor Littrow ha calcolato una tavola co-

modissima, la quale con un calcolo a tutti ovvio dà il raggio R della terza superficie, che qui per intero riferiremo con un esempio numerico, da cui ne apparisce apertamente l'uso per ogni caso particolare.

La prima colonna è l'argomento della tavola costruito dal rapporto $\pi = \frac{d m}{d m'}$ delle dispersioni del crown e del flint; la seconda dà il raggio R della terza superficie, quando la prima lente è isoscele, nel caso di $m = 1,50$, e di $m' = 1,60$; la terza colonna dà il valore del coefficiente $\left(\frac{d R}{d m}\right)$, e la quarta il valore di $\left(\frac{d R}{d m'}\right)$. Così per un valore qualunque di m e di m' , chiamando R il raggio cercato, e fingendo (R) il valore corrispondente ad $m = 1,50$, $m' = 1,60$ dato dalla prima colonna, sarà

$$R = (R) + \left(\frac{d R}{d m}\right) (m - 1,50) + \left(\frac{d R}{d m'}\right) (m' - 1,60) . \quad (1)$$

il calcolo della quale è prontissimo.

Ottenuto R , si avrà R' dall'equazione

$$\frac{1}{R'} = M \pi - \frac{1}{R} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

e la distanza focale dell'obbiettivo sarà data dall'equazione

$$\frac{1}{k'''} = 1 - (m' - 1) M \pi + \frac{0,0025}{m} \quad . \quad (3)$$

Suppongonsi i numeri R , R' positivi quando la seconda lente è concavo-concava; quindi se risulti dall'equazione (2) R' negativo, la quarta superficie sarà convessa.

Esempio. Sia $m = 1,53$, $m' = 1,63$, $d m = 0,0036$, $d m' = 0,0060$. Si avrà $\pi = \frac{d m}{d m'} = 0,60$; la tavoletta superiore § 163 darà $M = 1,891891$; però $M \pi = 1,135135$. In seguito si avrà $r = r' = 2 (m - 1) = 1,06000$; dalla tavola seguente per $\pi = 0,60$ si troverà

$$(R) = 1,01051, \quad \left(\frac{d R}{d m}\right) = 1,472, \quad \left(\frac{d R}{d m'}\right) = 0,555;$$

Inoltre sarà $m - 1,50 = 0,03$, $m' - 1,60 = 0,03$. Quindi l'equazione (1) darà R al modo seguente

$$\begin{aligned} (R) &= 1,01051 \\ (m-1,50) \left(\frac{dR}{dm} \right) &+ 0,04416 \\ (m-1,60) \left(\frac{dR}{dm} \right) &+ 0,01665 \end{aligned}$$

somma. = $R = 1,07132$

di qui si avrà

$$\log R = 0,0299192, \quad \log \frac{1}{R} = 9,9700808;$$

perciò $\frac{1}{R} = 0,933428$

$$M \pi = 1.135135$$

quindi $\frac{1}{R'} = M \pi - \frac{1}{R} = 0,201707$.

Per ultimo $R' = 4,95769$; e dall'equazione (3)
 $k''' = 3,49041$.

Avrà pertanto l'obiettivo le seguenti dimensioni:

Raggio della prima lente di crown isoscele
e convessa = 1.06000

Raggio della prima superficie della seconda
lente di flint (concavo-concava) . . . $R = 1,07132$

Raggio della seconda superficie rivolta all'oculare $R' = 4,95769$

Distanza focale dell'obbiettivo composto $k'' = 3,49041$

L'apertura dell'obiettivo sarà l'arco di 20° valutato nella prima lente, il quale sarà $= 0,370$, cioè poco più di un decimo della distanza focale.

Per vedere come in esso sieno distrutti gli errori di rifrangibilità e di figura si calcolino dietro i precetti del § 120 le distanze a cui convergono i raggi medj e rossi tanto prossimi all'asse, come remoti.

Si troverà

per i raggi medj prossimi all' asse . . . $k''' = 3,49035$

per i raggi verdi prossimi all'asse $k''' = 3,4900$
per i raggi rossi prossimi $k''' = 3,49035$

per i raggi medj estremi (a 10° d'incidenza) $k''' = 3,49049$

per i raggi medi estremi (a 10° di incidenza) $k'' = 3,49049$
per i raggi rossi estremi $k''' = 3,48936$

L'angolo sotto il quale i raggi estremi medj

tagliano l'asse = $3^{\circ} 1' 42'',2$

l'angolo dei raggi estremi rossi con l'asse = $3^{\circ} 1' 45'',2$

Se pertanto prendesi ad unità di misura la distanza focale dell'obbiettivo composto, l'aberrazione di figura residua sarà

$$\text{per i raggi medj} = \frac{0,00014}{3\frac{1}{2}} = 0,00004 \text{ circa}$$

$$\text{per i raggi rossi} = \frac{0,00099}{3\frac{1}{2}} = 0,00028.$$

Apparisce dal riferito confronto che la tavola seguente del signor Littrow porge un obbiettivo acromatico di facilissima costruzione a motivo della prima lente assunta isoscele, ed in cui è tolto egregiamente l'errore di rifrangibilità per i raggi prossimi all'asse; l'errore di figura residuo per i raggi medj è al di sotto del limite che gli abbiamo assegnato al § 116, e solo rimane una leggera aberrazione nei raggi rossi incidenti verso l'estremità; ma questa pure molto piccola, e non attendibile nella massima parte dei casi.

TAVOLA

*per calcolare il raggio della superficie anteriore
della lente di flint in un obbiettivo acromatico.*

τ	(R)	$\left(\frac{d}{d'} \frac{R}{m}\right)$	$\left(\frac{d}{d'} \frac{R}{m'}\right)$	τ	(R)	$\left(\frac{d}{d'} \frac{R}{m}\right)$	$\left(\frac{d}{d'} \frac{R}{m'}\right)$
0.500	1.00273	1.331	0.623	0.545	1.00817	1.414	0.590
1	1.00286	1.334	0.622	46	1.00826	1.415	0.589
2	1.00300	1.337	0.621	47	1.00837	1.416	0.589
3	1.00313	1.340	0.620	48	1.00844	1.417	0.588
4	1.00327	1.344	0.620	49	1.00852	1.418	0.587
0.505	1.00340	1.346	0.619	0.550	1.00861	1.419	0.587
6	1.00354	1.349	0.618	51	1.00870	1.420	0.585
7	1.00367	1.352	0.617	52	1.00878	1.421	0.584
8	1.00381	1.355	0.616	53	1.00886	1.421	0.583
9	1.00394	1.357	0.616	54	1.00894	1.422	0.582
0.510	1.00408	1.360	0.615	0.555	1.00901	1.423	0.581
11	1.00421	1.362	0.614	56	1.00909	1.424	0.581
12	1.00434	1.365	0.613	57	1.00916	1.425	0.580
13	1.00447	1.367	0.612	58	1.00923	1.426	0.580
14	1.00461	1.369	0.612	59	1.00930	1.427	0.579
0.515	1.00474	1.371	0.611	0.560	1.00937	1.428	0.579
16	1.00487	1.374	0.610	61	1.00945	1.429	0.578
17	1.00499	1.375	0.610	62	1.00950	1.430	0.577
18	1.00512	1.377	0.609	63	1.00956	1.431	0.576
19	1.00525	1.379	0.608	64	1.00962	1.432	0.576
0.520	1.00538	1.381	0.608	0.565	1.00967	1.432	0.575
21	1.00550	1.382	0.607	66	1.00975	1.433	0.574
22	1.00563	1.384	0.606	67	1.00978	1.434	0.573
23	1.00575	1.385	0.605	68	1.00984	1.435	0.573
24	1.00588	1.387	0.604	69	1.00989	1.436	0.572
0.525	1.00600	1.389	0.603	0.570	1.00994	1.437	0.572
26	1.00612	1.391	0.603	71	1.00998	1.438	0.571
27	1.00624	1.392	0.602	72	1.01003	1.439	0.570
28	1.00636	1.393	0.602	73	1.01007	1.440	0.569
29	1.00647	1.394	0.601	74	1.01011	1.441	0.569
0.530	1.00659	1.396	0.601	0.575	1.01014	1.441	0.568
31	1.00670	1.397	0.600	76	1.01018	1.443	0.567
32	1.00682	1.399	0.599	77	1.01021	1.444	0.567
33	1.00693	1.400	0.599	78	1.01025	1.445	0.566
34	1.00705	1.401	0.598	79	1.01028	1.446	0.566
0.535	1.00716	1.402	0.597	0.580	1.01031	1.448	0.566
36	1.00727	1.403	0.596	81	1.01033	1.449	0.565
37	1.00737	1.404	0.596	82	1.01036	1.450	0.564
38	1.00748	1.406	0.595	83	1.01038	1.451	0.563
39	1.00758	1.407	0.594	84	1.01041	1.452	0.563
0.540	1.00768	1.408	0.594	0.585	1.01042	1.453	0.562
41	1.00778	1.409	0.593	86	1.01044	1.454	0.561
42	1.00788	1.410	0.593	87	1.01045	1.455	0.561
43	1.00798	1.411	0.591	88	1.01047	1.456	0.561
44	1.00808	1.413	0.591	89	1.01048	1.457	0.560

π	(R)	$\left(\frac{dR}{dm}\right)$	$\left(\frac{dR}{dm'}\right)$	π	(R)	$\left(\frac{dR}{dm}\right)$	$\left(\frac{dR}{dm'}\right)$
0.590	1.01050	1.459	0.550	0.645	1.00928	1.533	0.544
91	1.01050	1.460	0.560	46	1.00925	1.534	0.544
92	1.01051	1.462	0.559	47	1.00922	1.535	0.544
93	1.01051	1.463	0.559	48	1.00919	1.536	0.543
94	1.01052	1.464	0.558	49	1.00916	1.537	0.543
0.595	1.01052	1.465	0.557	0.650	1.00912	1.538	0.543
95	1.01053	1.466	0.557	51	1.00909	1.539	0.543
96	1.01053	1.467	0.556	52	1.00906	1.540	0.543
97	1.01053	1.469	0.556	53	1.00904	1.540	0.543
98	1.01052	1.470	0.555	54	1.00902	1.541	0.543
0.599	1.01052	1.470	0.555	0.655	1.00899	1.541	0.542
0.600	1.01051	1.472	0.555	55	1.00897	1.542	0.542
1	1.01050	1.473	0.555	56	1.00895	1.542	0.542
2	1.01050	1.474	0.554	57	1.00893	1.543	0.541
3	1.01049	1.475	0.554	58	1.00892	1.544	0.541
4	1.01047	1.477	0.554	0.660	1.00890	1.544	0.541
0.605	1.01046	1.478	0.553	61	1.00888	1.544	0.541
6	1.01045	1.480	0.553	62	1.00887	1.544	0.541
7	1.01044	1.482	0.553	63	1.00886	1.545	0.541
8	1.01042	1.483	0.552	64	1.00885	1.545	0.541
9	1.01040	1.484	0.552	0.665	1.00885	1.545	0.541
0.610	1.01038	1.486	0.552	66	1.00884	1.544	0.540
11	1.01036	1.487	0.551	67	1.00884	1.544	0.540
12	1.01034	1.489	0.551	68	1.00884	1.544	0.540
13	1.01031	1.490	0.550	69	1.00885	1.544	0.540
14	1.01029	1.492	0.550	0.670	1.00885	1.544	0.540
0.615	1.01026	1.493	0.550	71	1.00886	1.543	0.540
16	1.01024	1.495	0.550	72	1.00887	1.542	0.540
17	1.01021	1.496	0.549	73	1.00888	1.542	0.541
18	1.01018	1.498	0.549	74	1.00890	1.541	0.541
19	1.01015	1.499	0.549	0.675	1.00892	1.540	0.541
0.620	1.01013	1.501	0.549	76	1.00894	1.539	0.541
21	1.01010	1.502	0.549	77	1.00896	1.538	0.541
22	1.01007	1.503	0.549	78	1.00899	1.537	0.541
23	1.01005	1.504	0.549	79	1.00902	1.536	0.541
24	1.01000	1.506	0.548	0.680	1.00906	1.534	0.541
0.625	1.00997	1.508	0.548	81	1.00910	1.532	0.541
26	1.00994	1.509	0.548	82	1.00914	1.531	0.541
27	1.00990	1.510	0.548	83	1.00919	1.529	0.542
28	1.00987	1.512	0.547	84	1.00924	1.527	0.542
29	1.00985	1.514	0.547	0.685	1.00929	1.525	0.542
0.630	1.00980	1.515	0.547	86	1.00935	1.523	0.542
31	1.00977	1.516	0.547	87	1.00941	1.521	0.543
32	1.00974	1.517	0.547	88	1.00947	1.519	0.543
33	1.00970	1.518	0.546	89	1.00954	1.516	0.543
34	1.00966	1.520	0.546	0.690	1.00962	1.513	0.543
0.635	1.00962	1.521	0.546	91	1.00970	1.510	0.543
36	1.00959	1.523	0.546	92	1.00978	1.507	0.543
37	1.00955	1.524	0.545	93	1.00987	1.503	0.544
38	1.00952	1.525	0.545	94	1.00997	1.500	0.544
39	1.00948	1.527	0.545	0.695	1.01007	1.497	0.544
0.640	1.00945	1.528	0.545	96	1.01017	1.494	0.544
41	1.00941	1.529	0.545	97	1.01028	1.490	0.545
42	1.00938	1.530	0.545	98	1.01039	1.487	0.545
43	1.00934	1.531	0.545	0.699	1.01051	1.484	0.545
44	1.00931	1.532	0.545	0.703	1.01063	1.480	0.545

CAPITOLO VII.

Proprietà degli specchj sferici; Teoria generale degli stromenti catadiottrici.

165. Poco dopo l'invenzione dei cannocchiali (nel 1616) il P. Niccolò Zucchi, gesuita parmigiano, sostituì uno specchio sferico alla lente obbiettiva adoperata dai primi inventori dei cannocchiali per vedere distintamente le lontane cose, e formò così il primo telescopio a riflessione di cui si fa menzione nella storia dell'ottica (*Smith, Cours d'optique Vol. II.; Settele, Elementi di ottica e di astronomia Vol. I. pag. 120.*). Nel 1663 Giacomo Gregory progettò il suo telescopio composto di due specchj l'uno parabolico e l'altro ellittico, il quale in pratica riuscì infelicamente per la difficoltà incontrata in ben lavorare gli specchj; ma al Newton nel 1668 si deve il vanto di avere primo minutamente descritto il telescopio, che poi portò il suo nome, e di averne rilevato i vantaggi sopra i comuni cannocchiali, nei quali la visione era confusa per la diversa rifrangibilità dei raggi luminosi, se per aumentarne la chiarezza si accresceva alcun poco l'apertura dell'obbiettivo. Ci proponiamo di esporre brevemente in questo Capitolo la teoria generale che serve di base alla costruzione degli stromenti catadiottrici, così appellati perchè le immagini degli oggetti sono vedute col mezzo di alcuni specchj, che riflettono la luce, e di alcune lenti che la rifrangono. Daremo nella seconda parte le dimensioni assegnate dalla teoria, perchè questi stromenti producano un buon effetto; frattanto per la chiara intelligenza delle cose seguenti è necessario premetterne una breve descrizione.

Telescopio di Newton.

166. Dimostreremo tosto che se in uno specchio sferico metallico e concavo ben levigato si ricevano i raggi

di luce provenienti da un oggetto lontanissimo vengono da esso riflessi e raccolti ad un punto situato alla metà del suo raggio, a cui si dà il nome di *foco*, ed ivi dipingono una piccola immagine inversa dell'oggetto stesso. Ciò posto, ecco la descrizione del telescopio newtoniano (fig. 37).

Rappresenta $PP'P'$ un tubo cilindrico di legno o di ottone, che si appoggia ad un piede con gli opportuni movimenti per dirigerlo a qualunque parte dello spazio, od a qualunque remoto oggetto. Alla sua estremità PP' si fissa uno specchio sferico concavo PAP' ben terso e levigato, di cui supporremo F il foco situato nell'asse comune del tubo e dello specchio FA . Rivolto il tubo ad un oggetto lontanissimo, i raggi da esso emanati verrebbero raccolti in F , ed ivi dipingerebbero una piccola immagine distinta e senza colori dell'oggetto medesimo. Se avanti la loro riunione il fascio dei raggi luminosi già molto ristretto viene intercettato da un piccolo specchio piano SS' inclinato ad angolo di 45° all'asse FA , sarà evidentemente riflesso verso F' in modo che $FS = F'S$; poichè lo specchio piano non turba la convergenza o la divergenza dei raggi, e nel punto F' si trasporterà l'immagine dell'oggetto. Se ora si pratica in F' sulla superficie del tubo una piccola apertura circolare, e vi si applica un piccolo cilindro nmn' , dentro di esso verrà dipinta l'immagine dell'oggetto, la quale si potrà osservare ponendo l'occhio in O coll'ajuto di una lente oculare di conveniente lunghezza focale. Questo telescopio presenta le immagini inverse, a meno che non vengano raddrizzate con una opportuna disposizione di oculari, e gli oggetti saranno riferiti ad una direzione perpendicolare alla loro effettiva e naturale direzione.

Il sostegno rs , ed il cilindro nmn' sono ambedue fissi in una medesima lastra di ottone, che coll'ajuto di una vite H si fa correre lungo un'apertura longitudinale praticata nella parete del tubo $pp'PP'$ ad oggetto di avvicinare lo specchietto ss' al maggiore PP' , o di allontanarlo secondo il bisogno, affinchè si abbia la distinta visione degli oggetti.

*Descrizione del telescopio di Gregory
e di Cassegrain.*

167. La *fig. 38* rappresenta il telescopio Gregoriano con i suoi specchj concavi, come si costruì dai riputati artefici Hadley, Short e da altri che vennero in seguito.

$PP'p'$ rappresenta un tubo o di legno o di ottone aperto dalla parte anteriore p' , ed alla sua parte posteriore PP' si applica uno specchio concavo di metallo ben polito e levigato. Il foco di questo specchio trovasi in F , ed ha una piccola apertura circolare A , alla quale si adatta un cilindro minore AO con due lenti di corto foco, che fanno le funzioni di oculare. Dietro il foco F avvi un piccolo specchietto concavo ss' , il cui diametro di poco eccede quello del foro A , e tale che riunisca i raggi luminosi provenienti da F nel tubo AO . Lo specchietto ss' è sostenuto da un sottile piede o gambo di ferro o di ottone infisso in una lamina L , che col mezzo di una vite HL può avvicinarsi ed allontanarsi per due pollici circa dal punto F ad oggetto di adattarlo alla chiara visione degli oggetti lontani, che col mezzo degli oculari applicando l'occhio al punto O si vedono ingranditi, dritti, e nella loro vera posizione.

Il telescopio di Cassegrain differisce da questo in ciò che il piccolo specchio ss' è convesso, in vece di essere concavo, e presenta gli oggetti inversi, se non vengano raddrizzati mediante un'opportuna disposizione di lenti oculari.

Dalle cose precedenti apparisce che le parti dello specchio maggiore PP' prossime all'asse si rendono inutili alla visione dei remoti oggetti tanto nel telescopio Newtoniano, quanto in quelli di Gregory e di Cassegrain per l'interposizione dello specchio minore, o per il foro in essi praticato; ma questo difetto che tende a diminuire la chiarezza di queste macchine ottiche è abbondantemente compensato dalla maggiore apertura che essi comportano in confronto de' comuni cannocchiali diottrici. Ciò premesso veniamo ad esporne la teoria nelle seguenti proposizioni.

168. *Definizione.* Si dimostra nella fisica coll'esperienza, che se un raggio di luce SQ (*fig. 39*) venga ad

incontrare una superficie piana AB tersa e levigata quanto è possibile, viene da essa riflesso in una direzione QS' in modo che l'angolo $S'QB$ sia uguale ad SQA ; e se per il punto Q conducessi la retta QP perpendicolare alla superficie riflettente AB , le rette SQ , PQ , $S'Q$ stanno in un medesimo piano. Gli angoli SQP , $S'QP$ risultano pure uguali; SQP chiamasi *angolo d'incidenza*, $S'QP$ *angolo di riflessione*.

169. PROPOS. I. Sia $MA M'$ (fig. 36) uno specchio sferico avente il centro di figura in C ; E un punto radiante situato nel prolungamento del raggio AC , che fingeremo essere l'asse dello specchio stesso; EM un raggio luminoso dalla superficie dello specchio riflesso nella direzione MF ; si domanda la posizione del punto F , in cui il raggio riflesso incontra l'asse EA .

Pongasi $AC = CM = r$, $AE = a$, $AF = z$; la perpendicolare MP condotta dal punto M sull'asse AE sia $= x$. Se le aperture degli specchi, come accade nelle macchine ottiche, siano di pochi gradi, sarà prossimamente $x = MA$, da cui non differisce che in quantità di terzo ordine; ed in generale riguarderemo x come una piccola quantità di cui trascureremo le potenze superiori alla seconda. Osservando che CM è perpendicolare alla superficie riflettente in M , sarà EMC (angolo d'incidenza) $= CMF$ (angolo di riflessione), ed i due triangoli EMC , CMF daranno

$$EC : CM :: \text{sen } EMC : \text{sen } E,$$

$$CM : CF :: \text{sen } F : \text{sen } CMF,$$

$$\text{ovvero} \quad a - r : r :: \text{sen } EMC : \text{sen } E;$$

$$r : r - z :: \text{sen } F : \text{sen } EMC;$$

le quali (moltiplicando per ordine) danno

$$a - r : r - z :: \text{sen } F : \text{sen } E.$$

Ora osservando che per le proprietà del circolo si ha $AP = \frac{x^2}{2r}$ (prossimamente) è facile vedere che (trascurando i termini dell'ordine x^3) sarà

$$\text{sen } F = \frac{PM}{FM} = \frac{x}{\sqrt{\left(a - \frac{x^2}{2r}\right)^2 + x^2}} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + \frac{r - z}{r} x}}$$

$$\text{sen } E = \frac{PM}{EM} = \frac{x}{\sqrt{\left(a - \frac{x'}{2r}\right)^2 + x'^2}} = \frac{x}{\sqrt{\left[a' - \frac{a-r}{r} x'\right]^2}}$$

Sostituendo questi valori nella precedente proporzione, moltiplicando gli estremi coi medj, e togliendo le frazioni, si formerà l'equazione

$$(a-r) \sqrt{\left[a' + \frac{r-a}{r} x'\right]^2} = (r-a) \sqrt{\left[a' - \frac{a-r}{r} x'\right]^2}$$

Se ora si sviluppano i radicali in serie, e si trascurano i termini moltiplicati per x' , si ottiene

$$(a-r) a - (r-a) a = - \frac{(a-r)(r-a)}{2r} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a}\right) x'$$

dalla quale si deduce

$$a = \frac{ra}{2a-r} - \frac{(a-r)(r-a)}{2r(2a-r)} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a}\right) x' \quad (1)$$

Apparece ora evidentemente che il valore di a si compone di due termini distinti, dei quali il primo è di grandezza finita, ed il secondo è tanto più piccolo quanto minore si assume l'apertura dello specchio. Fingendo pertanto questa molto piccola, sicchè i termini moltiplicati

per x' siano trascurabili, avremo $a = \frac{ra}{2a-r}$, alla quale equazione si può dare l'aspetto

$$\frac{2}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

che stabilisce una relazione fra il raggio dello specchio, la distanza del punto radiante, e del punto a cui dopo la riflessione convergono tutti i raggi luminosi che cadono in gran vicinanza dell'asse.

Se pongasi $a = \infty$, cioè se i raggi di luce cadano sullo specchio in direzioni parallele all'asse, sarà $\frac{2}{r} = \frac{1}{a}$, ovvero $a = \frac{1}{2} r$.

Pertanto i raggi di luce paralleli all'asse vanno dopo la riflessione a riunirsi negli specchi di piccola apertura tutti in un punto situato alla metà del raggio. Questo punto chiamasi *foco*, e la quantità $\frac{1}{2} r$ dicesi *distanza fo-*

cale dello specchio, e sarà da noi indicata come nella teoria delle lenti colla lettera p .

Quindi l'equazione (2) prenderà la forma

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

che è in tutto e per tutto simile alla equazione fondamentale della diottrica.

Consideriamo ora il secondo termine del valore di α , e per brevità indichiamolo per V , cosicchè sia

$$V = - \frac{(a-r)(r-\alpha)}{2r(2a-r)} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha} \right) x'.$$

Sostituendo per $\frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha}$ il suo valore $\frac{1}{p}$, ed eliminando in seguito r col mezzo dell'equazione (2) si troverà con semplici riduzioni

$$V = - \frac{(a-\alpha)^2}{8a'p} x' \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Se pertanto supponiamo in f il punto di riunione dei raggi emanati da E , ed incidenti nelle parti dello specchio prossime all'asse, ed in F il punto a cui si dirigono i raggi incidenti verso le estremità dello specchio, sarà

$$Af = \alpha = \frac{ra}{2a-r}; \quad fF = V = \frac{(a-\alpha)^2}{8a'p} x',$$

dove in luogo di α si potrà scrivere il suo valore precedente, e dove la quantità p rappresenta la distanza focale dello specchio, che trovammo $= \frac{1}{2}r$.

La quantità fF chiamasi qui, come nella teoria delle lenti, *aberrazione longitudinale di sfericità*.

170. *Coroll. I.* Nel punto f si formerà un'immagine del punto radiante E prodotta dalla riunione dei raggi prossimi all'asse, scevra da contorni colorati, non separandosi dagli specchj la luce bianca nei diversi colori, come accade nelle lenti. Manca pertanto nelle immagini prodotte da uno specchio quella confusione che trae origine dalla diversa rifrangibilità dei colori, che tanto nocimento apporta alla chiarezza e precisione negli stromenti diottrici; sussistono però gli errori di sfericità. Tuttavia sotto una stessa apertura ed una stessa distanza focale questi errori sono circa $\frac{7}{8}$ minori negli specchj, che nelle lenti.

Infatti l'aberrazione longitudinale di sfericità per i raggi paralleli all'asse si ha dall'equazione (4) ponendovi $a = \infty$, che si cangia in $V = \frac{x'}{8p} = 0,125 \frac{x'}{p}$; per una lente della stessa apertura e della stessa distanza focale la minima aberrazione di figura è $V = \frac{\mu x'}{p} = 0,9382 \frac{x'}{p}$ (facendo il potere rifrattivo = 1,55) § 107.

Risulta da tutto ciò avere gli specchj sopra le lenti comuni un grandissimo vantaggio, e potere sotto una stessa distanza focale comportare un'apertura molto maggiore; hanno poi lo svantaggio di assorbire o disperdere una quantità di luce maggiore di quella perduta nelle lenti, ed esposti all'aria umida sono sottoposti a perdere il loro polimento, appannarsi, ed anche a contrarre la ruggine; per le quali cose gli stromenti catadiottrici esigono una gran cura, e sono in generale di minore durata dei diottrici.

171. *Coroll. II.* Negli specchj di piccola apertura l'angolo MFA , sotto cui i raggi estremi tagliano l'asse, è prossimamente $= \frac{PM}{PF} = \frac{x}{a}$, come nelle lenti.

172. *Coroll. III.* Se per il punto f di riunione dei raggi prossimi all'asse conducasi fS perpendicolare all'asse medesimo, e si prolunghi fino all'incontro dell'ultimo raggio FM , per fs passeranno tutti i raggi luminosi emanati da E , e diretti ad MA . La linea fS chiamasi *aberrazione laterale di sfericità*, ed è rappresentata da $fF \tan fFS = \frac{(a - a')}{8a'a} \frac{x^3}{p}$, ed in generale se l'aberrazione longitudinale si rappresenta per Ux' , e l'angolo MFA per Hx , l'aberrazione laterale sarà $= H.U.x^2$ (come nella teoria delle lenti § 113), sia che queste quantità dipendano da un solo specchio, sia da che dipendano da una combinazione di specchj e di lenti disposte intorno ad un asse comune.

173. *Coroll. IV.* Con lo stesso ragionamento fatto nel § 114 per un sistema di lenti, si dimostrerà che il minimo spazio, per cui passano tutti i raggi riflessi dallo specchio è un piccolo circoletto fra F ed f , a cui si dà il

nome di circolo di aberrazione; il suo raggio risulta come nel citato luogo $= \frac{1}{4} H.U. x^3$, e l'angolo sotto cui è veduto dalla distanza l è $= \frac{H.U. x^3}{4l}$. Per i raggi paralleli all'asse in un solo specchio è $= \frac{x^3}{32 l p^2}$.

174. *Scolio*. L'equazione (2), ovvero l'equazione $\alpha = \frac{ra}{2a - r}$ da essa dedotta porge la spiegazione di tutti

i fenomeni osservati nella teoria degli specchj siano concavi, piani o convessi. Sia primieramente uno specchio concavo, come si suppone nella *fig.* 36, da cui l'equazione superiore fu ricavata; se pongasi $2a > r$, sarà α positivo, e dopo la riflessione i raggi si riuniranno in un punto avanti lo specchio da A verso E ; pongasi il punto radiante nel centro, cosicchè sia $a = r$; risulterà $\alpha = r$, e i raggi saranno rimandati al centro: se sia $a < \frac{1}{2}r$, cioè il punto radiante situato fra il foco e lo specchio, sarà α negativo, ed i raggi si riunirebbero dalla parte opposta ad un punto, a cui non possono pervenire per l'interposizione dello specchio, e saranno rimandati divergenti. In fine se sia a negativo, ovvero se i raggi cadano nello specchio convergendo ad un punto situato dietro di esso, sarà α positivo, e dopo la riflessione convergeranno ad un punto.

Sia in secondo luogo lo specchio convesso: sarà r negativo, ed α risulterà negativo, essendo a positivo; perciò gli specchj convessi faranno divergere i raggi paralleli, e quelli emanati da un punto. Se poi sarà a negativo, e minore di $\frac{1}{2}r$, risulterà α positivo; la distanza focale degli specchj convessi sarà negativa, o come dicono *immaginaria*, ed $= -\frac{1}{2}r$.

In fine se lo specchio sia piano, sarà $r = \infty$, ed $\alpha = -a$; cioè i raggi luminosi saranno rimandati da uno specchio piano colla stessa loro scambievolmente inclinazione, convergendo verso un punto situato dietro di esso in una distanza uguale a quella del punto radiante. Tutto ciò facilmente s'illustra con apposite figure, come trovasi dimostrato negli elementi di fisica.

175. *PROPOS. II.* Sia E e un oggetto, da tutti i punti

del quale vengano mandati dei raggi luminosi allo specchio $MA M'$; domandasi la posizione e grandezza della sua immagine Ff (fig. 40).

Sia C il centro dello specchio MM' , e per gli estremi E , e del dato oggetto si condcano le rette $EC A$; e CM , che riguarderemo come uguali in virtù della distanza grande a cui supponiamo situato l'oggetto in confronto dell'apertura dello specchio. I raggi emanati da C si riuniscano in F , in una distanza $FA = \alpha$ determinata

dall'equazione fondamentale $\frac{1}{p} = \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha}$; del pari i raggi emanati da e si riuniranno nella linea eCM' in f ad una distanza $fM' = FA = \alpha$. Quindi fatto centro in C con un intervallo $CF = r - \alpha$, descritto un piccolo archetto di circolo Ff , rappresenterà questo l'immagine della linea Ee , in quanto che tutti i suoi punti si possono riguardare egualmente distanti dal centro C . Il piccolo archetto Ff può aversi per una linea retta perpendicolare all'asse EA ; ponendo pertanto $Ee = z$, la sua immagine $Ff = z'$, $EA = a$, $FA = \alpha$, avremo dalle proprietà dei triangoli simili $z' = \frac{CF}{CE} Ee = \frac{r - \alpha}{a - r} z$. Ora

dall'equazione (2) si ottiene $r - \alpha = \frac{\alpha(a - \alpha)}{a + \alpha}$;

$a - r = \frac{\alpha(a - \alpha)}{a + \alpha}$; introdotti questi valori nell'equazione

* precedente, trovasi $z' = \frac{\alpha}{a} z = \alpha \phi$ ponendo $\frac{z}{a} = \phi$, ove

è palese che ϕ rappresenterà l'angolo ottico sotto cui ad occhio nudo è veduto l'oggetto Ee dal punto A , supponendo quest'angolo così piccolo che possa senza errore cambiarsi colla sua tangente.

Uno specchio concavo produce quindi nel suo foco un'immagine inversa, chiara e distinta di un oggetto della stessa grandezza di quella data da una lente di eguale foco (§ 45).

176. *Corollario.* Opposto uno specchio concavo al sole, i raggi da esso emanati verranno raccolti in un piccolo circoletto al suo foco, il cui raggio sarà $\alpha \phi = p \phi$,

a motivo di $\alpha = p$ per la sua infinita distanza da noi, dove ϕ rappresenterà il semidiametro del sole, che porremo $= 16'$. In questo circoletto i raggi concentrati del sole produrranno un grandissimo calore capace di abbruciare i corpi, e fondere anco i metalli. Siccome però i raggi incidenti verso l'estremità non si riuniscono esattamente nel foco, tutti però vengono a passare dentro un circoletto avente per raggio l'aberrazione laterale, così quello specchio produrrà maggiore effetto, in cui l'aberrazione laterale risulterà $= p \ 16' = p \tan 16'$. Avremo quindi per determinarne l'apertura l'equazione (§ 172)

$$p \tan 16' = \frac{x^3}{8p}, \text{ la quale dà}$$

$x = 2p \sqrt[3]{\tan 16'} = r \sqrt[3]{\tan 16'}$, e quindi (fig. 36)

$\frac{x}{r} = \text{sen } ACM = \sqrt[3]{\tan 16'}$, cioè l'arco AM di circa $9^\circ 36'$; e però l'apertura di uno specchio ustorio deve essere almeno di 20° .

Volendo rendere il circolo di aberrazione uguale all'immagine solare, si troverà invece un'apertura di circa 30° , e questa dovrà anche riputarsi più vantaggiosa, perchè aumentandosi il circolo in cui si diffondono i raggi solari intorno al foco, viene a riscaldarsi una maggiore superficie del corpo sottoposto all'esperienza, e viene quindi facilitata la fusione o l'abbruciamento di quella porzione che trovasi nel centro della massima azione, cioè nel foco stesso.

177. PROPOS. III. *Assegnare le circostanze relative al viaggio di un raggio luminoso attraverso ad un sistema ottico composto di due specchj concavi PP' , QQ' , e di quante si vogliano lenti convesse RR' , SS' , TT' (fig. 41) nell'ipotesi che il raggio emani da un punto E dell'asse comune ACO del sistema.*

Sieno per ordine p , q , r , s , t le distanze focali dei due specchj e delle lenti; a la distanza del punto radiante dallo specchio maggiore PP' ; EM un raggio diretto da E al punto P , donde riflettesi al minore specchio in q intersecando l'asse in F . Dal punto q con nuova riflessione dirigasi alla lente RR' verso r intersecando l'asse in G , e dalla lente RR' in virtù della rifrazione sia ob-

bligato a prendere la via $rstO''$ intersecando l'asse nei punti $O, O', O''...$ È palese che tutti i raggi emanati dal punto E (trascurando i piccoli errori di sfericità e di rifrangibilità) taglieranno l'asse $ACOO'$ nei punti F, G, O, O', O'' , ed ivi dipingeranno altrettante immagini dal punto E , ciascheduna delle quali potrà riguardarsi come un nuovo oggetto rapporto allo specchio od alla lente consecutiva. Ciò posto, chiamiamo le distanze $EC = a$, $CF = \alpha$, $cF = b$, $cG = \beta$, $GC' = c$, $C'O = \gamma$, $OC'' = d$, $C'O' = \delta$, $O'C''' = e$, $C'''O'' = \epsilon$, e così di seguito. Le quantità $a, \alpha, b, \beta, c, \gamma$ ec. esprimeranno le distanze di riunione relative a specchi ed a lenti aventi le distanze focali $p, q, r...$, e perciò in virtù delle cose precedenti saranno vincolate alle equazioni

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha}; \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{b} + \frac{1}{\beta}; \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{c} + \frac{1}{\gamma};$$

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{d} + \frac{1}{\delta} \text{ ec.}; \text{ ed inoltre se } d', d'', d''', d'''' \text{ indicano}$$

le distanze scambievoli degli specchi e delle lenti disposte come nella *fig. 41*, avremo le equazioni

$$d' = \alpha + b; \quad d'' = \beta + c; \quad d''' = \gamma + d,$$

le quali equazioni congiunte alle precedenti saranno bastanti a determinare la posizione delle successive immagini del punto radiante E .

Queste equazioni sono identiche a quelle già assegnate al § 51 per istabilire il viaggio di un raggio luminoso procedente da un punto dell'asse attraverso ad un sistema composto di quante si vogliano lenti, e però coi ragionamenti dei §§ 52-53 daranno luogo alle stesse conseguenze. Pertanto (chiamando x la semiapertura dello specchio maggiore)

1.° Gli angoli sotto i quali il raggio estremo taglia l'asse saranno espressi nel modo seguente

$$\begin{aligned} \text{in } F &= \frac{x}{\alpha}; & \text{in } G &= \frac{bx}{\alpha\beta}; \\ \text{in } O &= \frac{bcx}{\alpha\beta\gamma}; & \text{in } O' &= \frac{bcdx}{\alpha\beta\gamma} \text{ ec.} \end{aligned}$$

2.° Indicando successivamente per $x, x', x'', x'''...$ le semi-aperture degli specchi e delle lenti, affinchè i raggi, che dal punto E si dirigono al primo specchio, possano

attraversare senza impedimento tutto il sistema, dovranno aver luogo le seguenti equazioni

$$x' = \frac{b x}{a}; \quad x'' = \frac{b c x}{a \beta}; \quad x''' = \frac{b c d x}{a \beta \gamma},$$

nelle quali espressioni tutte a si cangerà in p , se sia $a = \infty$, e l'ultima delle lettere latine diverrà la distanza focale dell'ultima lente, se per la chiara visione della penultima immagine i raggi luminosi debbano da essa sortire paralleli.

178. PROPOS. IV. *Assegnare la grandezza delle immagini successive dell'oggetto $Ee = z$ prodotte dai raggi luminosi da esso emanati, attraversando il sistema ottico della fig. 41.*

Rinuendosi i raggi di luce emanati da E , ed incidenti nello specchio PP in F , la prima immagine di Ee sarà inversa, e rappresentata dalla piccola linea Ff perpendicolare all'asse; questa lineola diviene un nuovo oggetto rapporto allo specchio QQ ; e siccome supponiamo G il punto di riunione dei raggi emanati da F , sarà Gg la seconda immagine che dovrà riguardarsi come oggetto rapporto alla lente RR , in virtù della quale si produrrà la terza immagine in O , e così di seguito. Ciò posto si chiamino per ordine z' , z'' , z''' , z'''' queste immagini, e ritenendo le denominazioni precedenti sarà (§ 175)

$$z' = \frac{a}{a} z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{immagine inversa}$$

$$z'' = \frac{\beta}{b} z' = \frac{a \beta}{a b} z \quad . \quad . \quad \text{immagine diretta}$$

$$z''' = \frac{\gamma}{c} z'' = \frac{a \beta \gamma}{a b c} z \quad . \quad \text{immagine inversa (§ 56)}$$

$$z'''' = \frac{\delta}{d} z''' = \frac{a \beta \gamma \delta}{a b c d} z \quad . \quad \text{immagine diretta,}$$

e così delle altre.

Quindi tanto la grandezza, quanto la posizione delle immagini saranno date per le equazioni del § 56, donde si può concludere che le proprietà tutte dei cannocchiali diottrici convengono eziandio ai telescopj catadiottrici, e si avranno le medesime espressioni del campo, dell'ingrandimento e della chiarezza per ambedue queste specie

di stromenti ottici, per le quali rimandiamo in conseguenza al Capitolo III. Solo osserveremo che nei telescopj viene a mancare per l'interposizione del piccolo specchio $Q Q'$ il raggio principale condotto da c al centro del maggiore $P P'$, dietro l'andamento del quale abbiamo ricavato le espressioni del campo e del luogo dell'occhio; ma siccome gli altri raggi da c vibrati allo specchio incontrano l'asse sotto gli stessi angoli, e negli stessi punti, il luogo dell'occhio ed il campo rimarranno evidentemente i medesimi.

*Delle aberrazioni di rifrangibilità e di sfericità
nei telescopj.*

179. Poichè le immagini prodotte dai due specchi $P P'$, $Q Q'$ (fig. 41) sono esenti dagli errori di rifrangibilità non verranno nei telescopj introdotti i termini da questi dipendenti che in virtù degli oculari $R R'$, $S S'$, $T T'$ ec. e se ne potrà agevolmente stimare l'influenza dietro le stesse equazioni che abbiamo esposto nel Capitolo IV. In

fatti confrontando l'equazione $\frac{2}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a'}$, alla quale si appoggia la teorica degli specchi con l'equazione

$\frac{ia - i}{r} = \frac{1}{a} + \frac{m}{y}$ del § 38, che dà la posizione dell'immagine di un punto, in quanto che i raggi di luce sono rifratti da una sola superficie convessa, tosto si scorge che l'una all'altra riducesi facendo r negativo $m = -1$, $y = -a$; donde apparisce potersi la riflessione della luce riguardare come una rifrazione attraverso ad un mezzo ipotetico, in cui l'indice di rifrazione sia costante per tutti i raggi eterogenei, ed $= -1$. Dietro ciò le espressioni date per valutare le aberrazioni longitudinali, gli angoli di aberrazione e i contorni colorati si ridurranno al presente caso ponendovi $m = m' = -1$, $dm = d ia = 0$. Supponendo pertanto le lenti $R R'$, $S S'$, $T T'$ composte di una stessa specie di vetro, come d'ordinario si suol fare nella pratica, avremo gli angoli d'aberrazione quando dall'ultima lente i raggi medj devono sortire paralleli per la chiara visione in un telescopio a due specchi (§ 88)

con lenti

$$\text{I. } d\psi = -x'' \frac{d\gamma}{\gamma'} = \frac{dm}{m-1} \frac{1}{r} \frac{bcx}{\alpha\beta}$$

$$\text{II. } d\psi = -x''' \frac{d\delta}{\delta'} = \frac{dm}{m-1} \left(\frac{1}{r} + \frac{d'}{\gamma'} \frac{1}{s} \right) \frac{bc\gamma x}{\alpha\beta d}$$

e così per un maggior numero di lenti.

Del pari colle stesse modificazioni le equazioni del § 93 destinate a distruggere il contorno colorato si ridurranno alle seguenti:

$$\text{per lenti I. } \pi' = 0$$

$$\text{II. } \pi' + \pi'' \frac{d}{\gamma} = 0$$

$$\text{III. } \pi' + \pi'' \frac{d}{\gamma} + \pi''' \frac{de}{\gamma\delta} = 0$$

dalle quali apparisce non essere possibile con una sola lente distruggere il contorno colorato.

180. Veniamo ora agli errori di sfericità, e cerchiamo in primo luogo l'aberrazione longitudinale dovuta ai due specchj.



Siavi in A uno specchio concavo, dal quale i raggi prossimi all'asse emanati da una distanza a sieno riuniti in F , ed i raggi incidenti in una distanza x dall'asse sieno riuniti in f . Si dimostrò sopra (§ 169) essere

$$Ff = V = -\frac{(a-a')^2}{8a'p} x^2.$$

Ciò posto, in B esista il minore specchio da riguardarsi come concavo di distanza focale $= q$, e di una apertura $= x' = \frac{bx}{a}$. I raggi da F inviati a B prossimi all'asse sieno riflessi in G , e quelli pure prossimi all'asse emanati da f , si riuniscano in γ ; in fine i raggi da f inviati allo specchio B in una distanza x' dall'asse, si riflettano in g . Sarà Gg la cercata aberrazione longitudinale. Ora essendo $\frac{1}{q} = \frac{1}{b} + \frac{1}{\beta}$, avremo $d\beta = -\frac{\beta'}{b} db$; ponendo quindi $db = Ff$, sarà $d\beta = G\gamma$, e però

$G\gamma = -\frac{\beta^1}{b^1} \frac{(a-\alpha)^1}{8a^1p} x^1$, dove si dà al secondo membro il segno $-$, perchè essendo $fB > FB$, deve essere $GB > \gamma B$. Sarà in seguito γg l'aberrazione di sfericità dipendente dallo specchio B , la quale si otterrà da Ff cambiando a in b , α in β , p in q , x in $x' = \frac{bx}{a}$. Si otterrà in tal guisa

$$\gamma g = -\frac{(b-\beta)^1}{8b^1q} x'^1 = -\frac{(\beta-b)^1}{8\alpha^1q} x'^1.$$

Pertanto sarà

$$Gg = -\left(\frac{\beta^1}{b^1} \frac{(a-\alpha)^1}{8a^1p} + \frac{(\beta-b)^1}{8\alpha^1q}\right) x'^1.$$

I valori precedenti di Ff e di Gg si possono eziandio scrivere sotto una forma analoga a quella del § 108 nel modo seguente

$$Ff = -\alpha^1 x^1 P$$

$$Gg = -\frac{\alpha^1 \beta^1 x^1}{b^1} \left(P + \frac{b^1}{\alpha^1} Q\right)$$

purchè si ponga

$$P = \frac{(a-\alpha)^1}{8\alpha^1 \alpha^1 p}; \quad Q = \frac{(\beta-b)^1}{8b^1 \beta^1 q};$$

e se, come d'ordinario accade nei telescopj, i raggi luminosi sieno ricevuti nel primo specchio in direzioni parallele sarà $a = \infty$, $\alpha = p$, e quindi più semplicemente

$$P = \frac{1}{8p^1},$$

È ora palese che l'aberrazione longitudinale di sfericità per un sistema di specchj e di lenti disposte intorno al medesimo asse sarà data dall'equazione del § 109, purchè P e Q abbiano in esso i valori superiori, e le altre lettere $R, S, \dots$ mantengano rapporto alle lenti i valori ivi definiti.

Del pari indicando per k il raggio del circolo di aberrazione, sarà dato dall'equazione (11) del § 115, cioè si avrà

$$k = \frac{M a x^3}{4 h} \left(P + \frac{b^1}{\alpha^1} Q + \frac{b^1 c^1}{\alpha^1 \beta^1} R + \frac{b^1 c^1 d^1}{\alpha^1 \beta^1 \gamma^1} S + \dots\right)$$

dove M esprime l'ingrandimento del sistema, e per il caso dei telescopj dovremo porre $a > h$.

181. Il precedente valore del raggio di aberrazione ci conduce facilmente a scoprire il rapporto con cui devono variare le aperture dello specchio maggiore, variando la distanza focale affinchè la chiarezza dei telescopj rimanga costante. Dimosteremo nella seconda parte che lo specchio minore e gli oculari hanno una piccola influenza nella confusione originata dall'aberrazione di sfericità; pertanto avremo prossimamente $k = \frac{M x^3}{4} \quad P = \frac{M x^3}{32 p^3}$.

Ora per la chiara visione deve essere $My = x$ (§ 77), y essendo una quantità costante, che ivi abbiamo determinato dietro le dimensioni del cannocchiale di Huyghen, e che nei telescopj potrebbe avere un diverso valore, il quale si determinerà sempre agevolmente colle stesse considerazioni mediante un telescopio, il cui effetto sia stato riconosciuto commendevole per l'esperienza. Sostituendo in k il valore di $M = \frac{x}{y}$, si otterrà $k = \frac{x^4}{32 y p^3}$; quindi affinchè il raggio del circolo di aberrazione rimanga costante, devono i cubi delle distanze focali essere proporzionali alle quarte potenze delle aperture.

182. Quantunque nei telescopj a riflessione manchi per la massima parte la confusione prodotta dalla diversa rifrangibilità dei colori, e siano circa sette volte più piccoli gli errori della figura sferica, tuttavia questi nei forti ingrandimenti molto sono a temersi per le ragioni addotte al § 116, e quando se ne voglia diminuire l'influenza conviene necessariamente diminuire l'apertura, la quale nei telescopj newtoniani riscontrasi d'ordinario fra $\frac{1}{12}$ ed $\frac{1}{15}$ della distanza focale. Lo specchio minore dei telescopj trattenendo e rendendo inutili i raggi prossimi all'asse apporta un leggero detrimento alla loro chiarezza, e perciò conviene renderlo più piccolo che sia possibile.

Nei telescopj newtoniani, affinchè l'immagine degli oggetti sia portata dentro il tubo $n m m' n'$ (fig. 37) bisogna che sF superi il raggio del tubo, o vogliamo dire dello specchio maggiore, donde è facile di concludere,

che se l'apertura di questo è $\frac{1}{12}$ della distanza focale, il diametro del piccolo cilindro a cui è applicato lo specchietto SS' deve eccedere di alcun poco la duodecima parte dell'apertura di PAP' , e perchè tutti i raggi anche fuori dell'asse sieno fedelmente rimandati all'oculare, converrà determinarlo fra la sesta e settima parte.

Nei telescopj di Gregory e di Cassegrain (*fig. 38*) conviene prendere l'apertura dello specchietto ss' almeno uguale al diametro del foro circolare praticato sul mezzo A dello specchio maggiore PAP' , altrimenti i raggi paralleli all'asse avrebbero diretto accesso alle lenti oculari, e renderebbero la visione confusa, ma qui pure perchè possano essere riflessi i raggi tutti inclinati all'asse sarà conveniente dare a questa misura un piccolo aumento. Oltre a ciò fra la distanza focale dello specchietto ss' , e la posizione rapporto al foco F dello specchio maggiore esistono alcune relazioni che è d'uopo assegnare.

1.° Sia il piccolo specchio QQ' (*fig. 41*) concavo, come nei telescopj gregoriani. Affinchè tutti i raggi rimandati da questo non occupino nello specchio maggiore uno spazio più grande del foro, conviene che il punto G cada da c verso C , e sia $cG > \frac{1}{2}cC$. Quindi a motivo di $Fc = b$, $cG = \beta$, $cC = \alpha + b = p + b$, dovrà essere β positivo, e $> \frac{1}{2}(p + b)$. Ora si ha $\beta = \frac{bq}{b - q}$;

dunque dovrà essere b positivo, e $> q$; cioè il piccolo specchio concavo situato oltre il foco F dello specchio maggiore; e poichè $\beta > \frac{1}{2}(p + b)$, sarà

$2bq > (p + b)(b - q)$, dal quale rapporto deducesi $pq > (p + b - 3q)b$, ovvero (a motivo di $b > q$) $p > p + b - 3q$, cioè $b < 3q$. Pertanto b deve cadere fra i limiti q e $3q$.

2.° Sia lo specchietto QQ' convesso, come nei telescopj di Cassegrain. Qui pure dovrà il punto G cadere da c verso C ad una distanza non minore di $\frac{1}{2}cC$, e però dovrà risultare β positivo. Ora essendo per uno specchio convesso q negativo, dovrà essere b pure negativo affinchè sia β positivo, cioè sarà lo specchietto convesso situato fra lo specchio PP' ed il suo foco F . A maggiore scem-

plicità si cangi nelle formule superiori q in $-q$, b in $-b$, e dovrà esscre $\beta = \frac{bq}{q-b}$, e $\beta > \frac{1}{2}(p-b)$, perciò sarà $q > b$.

183. *Scolio I.* Abbiamo nelle cose precedenti supposto che fosse sferica la figura data agli specchj, e tale d'ordinario si fa dalla maggior parte degli artefici per la facilità del lavoro. Convien però confessare che tale figura non è la più conveniente per la costruzione dei grandi telescopj, nei fortissimi ingrandimenti troppo sensibile diventando la confusione risultante per l'aberrazione di sfericità, e se per diminuirla restringesi l'apertura, diminuisce la chiarezza, e lo stroimento perde il suo pregio principale. Sono notissime dalle sczioni coniche le proprietà delle paraboloidi e delle ellissoidi di rivoluzione perchè qui ci dobbiamo trattcnere a dimostrarle; da esse risulta che in una paraboloide generata dalla rivoluzione di un arco di parabola intorno al suo asse principale, tutti i raggi luminosi paralleli a questo asse vengono a riunirsi esattamente nel suo foco, e quindi se da un oggetto lontanissimo emanino raggi luminosi allo specchio medesimo, si dipingerà nel foco una piccola immagine inversa scevra da ogni aberrazione di rifrangibilità e di figura, donde facilmente si conclude che la vera figura da darsi agli specchj maggiori dei telescopj sarà quella della paraboloide di rivoluzione. Nelle ellissoidi invece i raggi luminosi emanati da un piccolo oggetto situato in uno dei fochi vanno a dipingerne l'immagine nell'altro, e perciò uno specchio formato da un segmento di ellissoide sarà di uso opportuno in luogo del minore specchio sferico nei telescopj gregoriani.

La grande apertura congiunta a forti ingrandimenti ed a somma chiarezza e precisione che ai loro telescopj di forma newtoniana e gregoriana diedero prima di tutti i valentissimi artefici inglesi Hadley e Short ci fanno credere che essi possedessero il secreto di lavorare gli specchj di figura parabolica. Ma più di tutti in questo genere di costruzioni si sono acquistati somma riputazione i professori Herschel di Hannover, Schröther di Lilienthal, Schrader di Kiel, e fra i nostri Italiani il professore Giam-

batista Amici di Modena, i quali hanno immaginato metodi loro proprj e particolari per lavorare gli specchj secondo la figura parabolica ed ellittica, e dai loro elaboratorj sono sortite macchine ottiche di mole gigantesca e singolare perfezione, che nuove e sorprendenti meraviglie ci hanno svelato nel firmamento.

184. *Scolio II.* La bontà di un telescopio dipende senza dubbio dalla esattezza della figura degli specchj, ma molta ed essenziale parte vi ha pure la qualità del metallo che vi s'impiega. Tutti i metalli levigati e bruniti riflettono la luce, ma alcuni in maggior altri in minore copia, e quelli certamente sono da preferirsi che ne assorbono o disperdono una minore quantità. Molte composizioni sono state adoperate, e trovate quali più, quali meno atte a riflettere la luce. Schroeter adoperava la composizione prescritta dall'inglese Edward, come egli stesso asserisce nella descrizione del suo gran telescopio di 27 piedi posta in fine alle sue osservazioni intorno a Venere pubblicate in Gottinga nel 1796 sotto il titolo di *Aphroditografische Fragmente*, ed a questa probabilmente si attenero Herschel e Schrader. Il signor Amici adoperò una lega metallica (di cui ignoro le proporzioni) la quale giusta le proprie sue osservazioni (*Zach, Correspond. Astronomique* Vol. X. pag. 546.) riflette una copia di luce maggiore di quella degli specchj di Herschel; ma riesce più fragile, e forse non si potrebbe adottare nelle dimensioni grandissime alle quali quell'insigne astronomo portò i suoi telescopj. Noi crediamo fare cosa grata ai nostri lettori riferendo le ricette che trovansi nell'Ottica di Smith, e nel Dizionario di fisica di Fischer all'articolo *Spiegel telescop*, per la composizione delle leghe metalliche atte alla loro costruzione.

1.^a Secondo Smith, si fondono insieme 3 parti di rame ed $1\frac{1}{2}$ parti di stagno; od anche 6 parti di buon ottone di Amburgo, ed 1 parte di stagno; infine migliore ancora risulta la lega metallica adoperando ed insieme fondendo 2 parti della prima composizione, ed 1 parte dell'ultima.

2.^a Ginstà il processo di Mudge si prendono due libbre (*pfund*) di rame di Svezia, $14\frac{1}{2}$ once di stagno granulato; si fonde primieramente il rame con 14 once di

stagno; tale composizione rifondesi con quel solo grado di calore che è sufficiente alla fusione, aggiugnendovi la residua mezza oncia di stagno, e gettando nel crociolo una cucchiata di carbone pesto.

3.^o Edward prescrive di fondere insieme 32 once di rame; 15 in 16 once di stagno granulato, un' oncia di ottone, un' oncia d' arsenico, ed un' oncia di argento. Nella ultima politura e brunitura degli specchj egli adopera il *colcothar* in luogo della *cenere di stagno* da altri usata.

4.^o Macquer, Morveau e Durande hanno delle bellissime composizioni per gli specchj fondendo il platino con un' aggiunta di 16 parti di cristallo polverizzato, 2 parti di borace calcinato, una parte di polvere di carbone con ferro.

5.^o Rinmann asserisce essere fra tutte le composizioni migliore la seguente: due parti di ottone, una parte di cobalto, ed una parte di arsenico.

7.^o Sono state pure tentate delle composizioni di argento ed oro, come anche il platino puro con felice successo; ma scarse ne sono le prove perchè troppo costose.

APPENDICE

*contenente la descrizione dell' eliostata
del signor Pietro Prandi.*

185. Abbiamo nel primo Capitolo riferito i modi più acconci per istabilire l'indice di rifrazione e di dispersione delle diverse specie di vetri opportuni alla costruzione delle macchine ottiche, e questi elementi sono in vero di tale importanza che non si potrebbe giammai reputare superflua qualunque diligenza nella loro determinazione. La maggiore difficoltà che s'incontra in quelle osservazioni si è il continuo movimento del raggio solare introdotto o direttamente, o col mezzo di uno specchio nella camera oscura, e se istituire si voglia una serie di esperimenti ottici è indispensabile munirsi di un buon eliostata, il quale mantenga il raggio solare dentro la camera in una direzione costante e comoda.

Gravesande, siccome già indicammo al § 12, è l'inventore di questo apparato, la cui descrizione e teoria

leggesi nel Vol. II. del suo eccellente Trattato di fisica (edizione III., Leida 1772. p. 715. e seg.); in seguito molti altri autori ne hanno trattato, e fra questi vogliamo particolarmente noverare il chiarissimo signor Biot, il quale nel suo corso di Fisica (Vol. III. Parigi 1816. pag. 175. e seg.) ne dà una elegante teoria analitica congiunta ad una completa e chiara descrizione con una modificazione utilissima dovuta al signor Charles. Convien tuttavia confessare che l'eliostata di Gravesande è alquanto complicato e costoso, nè con facilità può da qualunque artefice essere eseguito; e rimaneva sempre il desiderio che venisse semplificato. Il chiar. signor Prandi negli Opuscoli scientifici di Bologna ha esposto la descrizione di un nuovo eliostata, che ci sembra soddisfare al voto universale, ed apparisce di tale semplicità che qualunque diligente meccanico possa agevolmente costruirlo. Non avendo fino al presente avuto occasione di farlo eseguire da alcuno dei valenti meccanici di questa città, stimiamo opportuno di riferirne la descrizione dell'autore che nulla lascia a desiderare (*Op. scient. di Bologna an. 1824. p. 244.*).

186. » La linea AB (fig. 42) rappresenti un asse parallelo a quello del mondo, cui adattato orologio volga secondo la diurna rivoluzione del sole (1): s'indichino i raggi solari incidenti colla linea RB ; uno specchio (la cui sezione per l'asse è rappresentata dalla SP), il quale, unito con cerniera ad AB , porti nel rovescio la coda BC nel prolungamento del suo asse, allorchè questa coda divida per mezzo l'angolo ABE (distanza del sole dal nostro polo nel mezzodì di ciascun giorno), rifletterà il raggio RB in Br prolungamento di AB . Perchè poi il piano ABE , in virtù della rotazione dell'asse AB , mantensi parallelo costantemente ai raggi incidenti, i riflessi saranno immobili lungo la Br . L'eliostata di Farenheit soddisfa a quest'ultima condizione, ma è abbandonato generalmente dai fisici perchè il raggio così riflesso ha una direzione incomoda ».

187. » Per avere questo raggio in altra arbitraria direzione ho collocato lo specchio colla sua coda abbastanza

(1) Si dovrà concepire AB come l'asse di un cilindro il quale in 24 ore compia una rivoluzione intorno a se stesso da oriente in occidente.

allungata in un sostegno a parte, sul quale può muoversi intorno a due assi, uno de' quali è un suo diametro, mentre l'altro che passa pel di lui centro ed è perpendicolare al primo è in un piano che può inclinarsi comunque al piano dello specchio: così questo può prendere qualunque posizione fermo rimanendo il suo centro. Un'asta BE , mobile intorno al punto B nel piano della figura, sia posta parallela ai raggi incidenti RB , cioè misuri sulla graduazione YD il complemento di declinazione del sole: la sua lunghezza eguagli la distanza del centro B' dello specchio nella sua nuova posizione dal punto B . Quest'asta tragga seco ne' suoi movimenti la coda $B'C'$ dello specchio $S'P'$; il raggio riflesso sarà allora costantemente nel prolungamento di BB' verso r' . Imperocchè come una perpendicolare BQ alla base $B'E$ del triangolo isoscele $B'BE$ ne divide in parti eguali l'angolo al vertice $B'BE$, così la $S'P'$, perpendicolare alla stessa base, dividerà egualmente l'angolo $R'B'B$ interno ed opposto all' EBB' fra le parallele RE , $R'B'$; onde perchè l'angolo $S'B'r'$ eguagli l'altro $R'B'P'$ converrà che la linea $r'B'$ sia per diritto alla $B'B$.

187. «Nella figura 43 è rappresentata la prospettiva del mio eliostato costruito in legno secondo i semplici principj esposti. Esso ha una base triangolare equilatera XGK , che può mettersi a livello mediante tre viti agli angoli: ogni lato di questa base è circa di sei decimetri. La sua superficie è divisa per mezzo dalla linea GI destinata a collocarsi nella meridiana del luogo di osservazione colla estremità G rivolta al sud; di qui avanti si parlerà come se questa collocazione fosse fatta. Ad una piccola distanza dal punto G s'eleva la colonna OV quadrangolare perpendicolarmente alla base; di modo che il suo asse cada precisamente sopra la meridiana. Questa colonna è superiormente terminata dalla calotta sferica U , la quale accolga esattamente la sfera B rappresentante il globo terracqueo. AB è l'asse di rotazione della sferetta, il quale deve essere parallelo a quello del mondo, per cui si appoggia colla sua estremità A sull'arco FH graduato, che attraversa la colonna OV , e può dolcemente scorrervi; così l'angolo fatto da AB colla verticale condotta pel centro della sferetta B indicherà il complemento dell'altezza del

polo, il quale angolo si può misurare con precisione mediante il nonio V . Acciò l'asse AB possa prestarsi alle diverse altezze di polo conviene che l'apertura fatta nella calotta sferica, per cui s'insinua e penetra fino al centro B sia oblunga nel senso verticale; è a questo asse che s'adatta l'orologio onde si volga secondo il movimento apparente del sole. Un settore BDY è fissato stabilmente alla sferetta, e la sua graduazione è sostituita a quella dell'arco DY della figura 42. Il raggio che lo divide per mezzo deve essere perpendicolare ad AB , ed il punto cui corrisponde nell'arco DY è lo zero della graduazione, la quale serve alla misura della declinazione del sole. L'asta LBE , mobile intorno al punto B , facendo col raggio anzidetto un angolo eguale a questa declinazione, sarà parallela ai raggi solari: per misurare con esattezza quest'angolo è opportuno un nonio inciso all'estremità L . All'altra estremità E è fissato un congegno consistente nella verghetta xy parallela all'asta BE e mobile intorno al suo asse, il quale prolungato passerebbe pel centro B . Questa verghetta dalla parte yz si divide in due rami eguali formanti assieme un semicircolo, il diametro del quale, perpendicolare all'asse di quella, è pure diametro ed asse di rivoluzione di un anello abbracciato da esso semicircolo: il diametro del vano dell'anello è tale che questo viene esattamente infilato dalla coda cilindrica $B'C'$ già perpendicolare alla superficie dello specchio $S' \gamma P'$. A questo modo, ruotando l'asse AB , il centro dell'anello descrive un circolo, e la sua superficie resta sempre perpendicolare alla coda $B'C'$; si ricordi che è condizione essenziale che BB' eguagli la distanza di B al centro dell'anello descritto. Lo specchio ubbidisce ai movimenti cui lo strascina la coda $B'C'$, la quale occupa stabilmente il di lui asse, sospeso come è per un suo diametro agli estremi $\gamma\gamma$ di una biforca semicircolare $\gamma\beta\gamma$, la quale si termina dalla verga $\beta\alpha$ perpendicolare sul mezzo della spranga N' , e ruotante in se stessa: questa verga è pure sostenuta da un braccio fissato all'altra traversa N . In tal guisa resta adempita la condizione espressa al § 187, per cui la superficie dello specchio trasportato doveva potersi volgere dovunque, fermo restando il suo centro, e quindi sempre egualmente distante dal punto B .

Non contento di poter così ottenere nel raggio riflesso quella direzione costante che più piacesse, ma invariabile dopo essere stata scelta una posizione data della linea BB' , ho adoperato un facile meccanismo, onde poter anche cambiare a capriccio questa posizione, e quindi quella del raggio riflesso, senza dovere scomporre la macchina per adattarla alla nuova direzione che si volesse in questo raggio. Ciò si otterrà cambiando posto allo specchio, semprechè la distanza BB' rimanga la stessa ed eguale a Bz ; dovrà dunque il centro B' potersi portare solamente sopra i punti di una superficie sferica avente per centro B . Nel mio eliostato di fatti quel centro può descrivere dei cerchi in piani verticali, che passano per esso e per B , ed altri cerchi in piani orizzontali tutti aventi per raggio la linea BB' : perocchè i lati M, M' del telaio $MNMN'$ scorrono in due canali circolari incavati nelle faccie per cui si guardano i due archi solidi RP, RP ; i piani delle basi di questi canali sono verticali e paralleli al piano verticale condotto per B e B' ed equidistanti da esso; così i due canali sono fatti secondo la curvatura di due paralleli egualmente distanti dal centro B della sfera, che passa per i due archi RP, RP . Perchè poi i due scorridori MM possano rimanere dentro ai rispettivi canali, questi sono scavati a coda di rondine, e quelli vi si adattano conformati egualmente. I due pezzi RP, RP sono sostenuti da due colonnette S, S che s'elevano perpendicolarmente all'arco $T'T'$, il quale può girare nel piano della base sopra l'arco TT' , perchè è legato ai due regoli $T'O', T'O'$, che insieme concorrono nel punto O' estremo dell'asse della colonna OV , e centro di rotazione di questo movimento; il punto O' è nell'asse di una vite che serve a mantenere fissa la colonna OV . In tal guisa il centro B' , che pel precedente meccanismo è capace di un moto circolare in piani verticali, per questo può muoversi pur circolarmente in piani orizzontali ».

INDICE

DEL VOLUME I.

P	REFRAZIONE	»	III
CAP. I.	<i>Metodi opportuni per determinare il potere rifrattivo e dispersivo di varie specie di vetri.</i>	pag.	1
	<i>Metodi da praticarsi per determinare l'indice di rifrazione nelle diverse qualità dei vetri »</i>		11
	<i><u>Intensità della luce nei diversi colori dello spettro solare, e del medio rapporto di dispersione.</u></i>	<i>»</i>	<i>29</i>
	<i><u>Viaggio del raggio luminoso per due prismi di diverso potere refringente. Del vitrometro di Boschovich.</u></i>	<i>»</i>	<i>33</i>
	<i><u>Usi del vitrometro</u></i>	<i>»</i>	<i>40</i>
	<i><u>Viaggio del raggio luminoso per qualunque numero di prismi</u></i>	<i>»</i>	<i>45</i>
CAP. II.	<i>Proprietà di una sola lente; Metodi per determinare la distanza focale di una lente; Teoria delle lenti ustorie</i>	<i>»</i>	<i>50</i>
	<i><u>Metodi per determinare la distanza focale di una lente</u></i>	<i>»</i>	<i>60</i>
	<i><u>Delle lenti ustorie</u></i>	<i>»</i>	<i>63</i>
CAP. III.	<i>Proprietà generali di un sistema di lenti disposte intorno ad un medesimo asse. Ingrandimento e chiarezza delle immagini vedute attraverso ad un sistema di lenti. Degli occhiali</i>	<i>»</i>	<i>67</i>

<i>Dell'ingrandimento e del campo degli stromenti ottici.</i>	76
<i>Della chiarezza delle immagini negli stromenti ottici.</i>	82
<i>Degli occhiali.</i>	88
 <i>CAP. IV. Teoria delle aberrazioni derivanti in un dato sistema di lenti dalla diversa rifrangibilità dei colori; equazioni alle quali si deve soddisfare per distruggerle</i>	96
<i>Aberrazioni dipendenti dalla diversa rifrangibilità dei colori per i punti situati fuori dell'asse</i>	110
 <i>CAP. V. Teoria delle aberrazioni prodotte in un sistema di lenti dalla loro figura sferica. Condizioni per distruggerle, o per ridurne la influenza al minimo valore possibile . .</i>	114
<i>Applicazione delle formule precedenti ad alcuni casi particolari</i>	124
<i>Dell'aberrazione laterale, e del minimo circolo di aberrazione</i>	133
 <i>CAP. VI. Della costruzione degli obbiettivi acromatici per uso dei cannocchiali</i>	138
<i>Obbiettivi acromatici di due lenti a contatto, delle quali trascurasi la grossezza . . .</i>	142
<i>Teoria degli obbiettivi acromatici del signor Herschel</i>	158
<i>Costruzione degli obbiettivi acromatici, avendo riguardo alla grossezza e distanza delle lenti</i>	171
<i>Metodo del signor Klügel per determinare le dimensioni di un obbiettivo acromatico . .</i>	175
<i>Equazioni di condizione per la correzione di un obbiettivo prossimamente acromatico . .</i>	182
<i>Degli obbiettivi acromatici composti di tre lenti, delle quali la prima e terza di crown, la seconda di flint</i>	189
<i>Costruzione degli obbiettivi triplicati nella supposizione che siano trascurabili le grossezze e distanze delle lenti</i>	193

Calcolo degli obbiettivi acromatici triplicati, quando si tiene conto della distanza dei centri delle lenti » 201

APPENDICE in cui si espone un metodo indiretto per determinare le dimensioni di un obbiettivo acromatico a due lenti » 212

CAP. VII. Proprietà degli specchj sferici; Teoria generale degli stromenti catadiottrici » 223

Telescopio di Newton » 223

Descrizione del telescopio di Gregory e di Cassegrain » 225

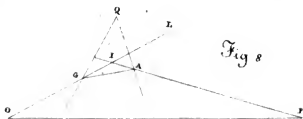
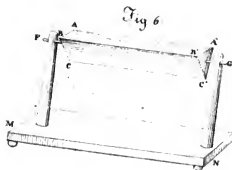
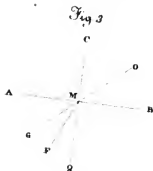
Delle aberrazioni di rifrangibilità e di sfericità nei telescopj » 235

APPENDICE contenente la descrizione dell'eliostata del signor Pietro Prandi » 242

VAd 1517397
C02 n8017







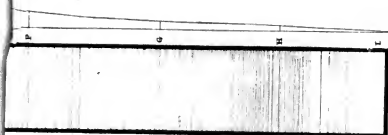


Fig. 13.



Indice

Fig. 14.

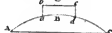


Fig. 15.



Fig. 17.



Fig. 18.

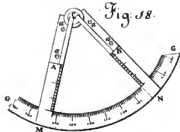


Fig. 20. a



Fig. 20. b





Fig. 23.

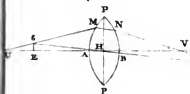


Fig. 24.

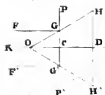


Fig. 27.

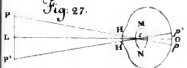


Fig. 28.



Fig. 29.



Fig. 30.

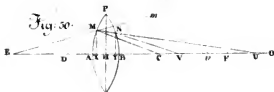


Fig. 33.



Fig. 32.

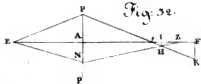


Fig. 35.



Fig. 34.

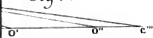


Fig. 35.

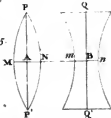


Fig: 37

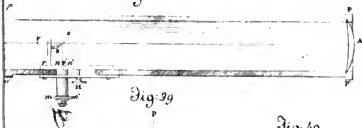


Fig: 39



Fig: 40

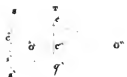
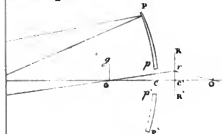
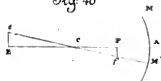


Fig: 49

